Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof°. Edson

2° Semestre

Gabarito 1ª Prova **2025**
Data: Quinta-feira, 25 de Setembro **Turma M4**

Exercício 1 *Observe que a equação*

$$y' \operatorname{tg} x = 2y - 8$$

pode ser reescrita da seguinte forma

$$y' - 2 \operatorname{cotg} x \, y = -8 \operatorname{cotg} x,$$

o que a caracteriza como uma ***equação diferencial linear****, em que*

$$p(x) = -2 \operatorname{cotg} x$$

$$f(x) = -8 \operatorname{cotg} x$$

Desta forma, considere

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int p(x) dx \\ &= -2 \int \operatorname{cotg} x \, dx \\ &= -2 \ln |\operatorname{sen} x| + c_0, \; c_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tomando $c_0 = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{-2 \ln |\operatorname{sen} x|} \\ &= e^{\ln |\operatorname{sen} x|^{-2}} \\ &= \frac{1}{|\operatorname{sen} x|^2} \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \end{aligned}$$

segue-se que,

$$\begin{aligned} q(x) &= \int \mu(x) f(x) dx \\ &= -8 \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{cotg} x \, dx \\ &= -8 \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} dx \\ &= \frac{4}{\operatorname{sen}^2 x} + c_1, \; c_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{q(x)}{\mu(x)} \\ &= \left(\frac{4}{\operatorname{sen}^2 x} + c_1 \right) \operatorname{sen}^2 x \\ &= c_1 \operatorname{sen}^2 x + 4 \end{aligned}$$

Sabe-se que

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

e disto segue-se que

$$\begin{aligned} c_1 \operatorname{sen}^2 \tfrac{\pi}{2} + 4 &= 0 \quad \Rightarrow \\ c_1 + 4 &= 0 \quad \Rightarrow \\ c_1 &= -4 \end{aligned}$$

e, portanto

$$\begin{aligned} y(x) &= -4 \operatorname{sen}^2 x + 4 \\ &= 4 \left(1 - \operatorname{sen}^2 x \right) \\ &= 4 \cos^2 x \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Deseja-se resolver a equação*

$$-2xy \operatorname{sen} \left(x^2 \right) dx + \cos \left(x^2 \right) dy = 0$$

Para isso, considere

$$M(x, y) = -2xy \operatorname{sen} \left(x^2 \right)$$

$$N(x, y) = \cos \left(x^2 \right)$$

e observe que,

$$M_y(x, y) = -2x \operatorname{sen} \left(x^2 \right)$$

$$N_x(x, y) = -2x \operatorname{sen} \left(x^2 \right)$$

Ou seja,

$$M_y(x,y) = N_x(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

*o que permite afirmar que a equação em questão é **exata** e, portanto existe uma função $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = M(x,y) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = N(x,y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = -2xy \operatorname{sen}\left(x^2\right) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \cos\left(x^2\right) \end{cases}$$

Ou seja,

$$\varphi(x,y) = y \cos\left(x^2\right) + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$$

e a solução da equação em questão é

$$\varphi(x,y) = c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} y \cos\left(x^2\right) &= c,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ y &= c \sec\left(x^2\right) \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Para a resolução da equação*

$$\left(y \ln y + 2xy^2\right) dx + \left(x + x^2 y\right) dy = 0,$$

considere

$$M(x,y) = y \ln y + 2xy^2$$

$$N(x,y) = x + x^2 y$$

e observe que

$$N_x = 1 + 2xy$$

$$M_y = \ln y + 1 + 4xy$$

e

$$\begin{aligned} P(y) &= \frac{N_x - M_y}{M} \\ &= \frac{-(\ln y + 2xy)}{y(\ln y + 2xy)} \\ &= -\frac{1}{y} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int P(x) dx \\ &= -\int \frac{1}{y} dy \\ &= -\ln|y| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tomando $c_0 = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \mu(y) &= e^{\eta(y)} \\ &= e^{\ln|y|^{-1}} \\ &= \frac{1}{|y|} \\ &= \pm\frac{1}{y} \end{aligned}$$

Escolhendo

$$\mu(y) = \frac{1}{y}$$

e multiplicando a equação dada por μ, tem-se

$$(\ln y + 2xy)\, dx + \left(\frac{x}{y} + x^2\right) dy = 0$$

*que, agora é **exata**. Logo, existe uma função $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \ln y + 2xy \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \dfrac{x}{y} + x^2 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\varphi(x,y) = x \ln y + x^2 y + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

e a solução da equação em questão é, portanto

$$\varphi(x,y) = c_3,\ c_3 \in \mathbb{R}$$

Ou seja

$$x \ln y + x^2 y = c,\ c \in \mathbb{R}$$

■

Exercício 4 *Observe que a equação*

$$xy^2y' = y^3 - x^3$$

pode ser reescrita da seguinte maneira

$$xy^2\frac{dy}{dx} - y^3 + x^3 = 0 \Rightarrow$$

$$xy^2\,dy + \left(x^3 - y^3\right)dx = 0 \Rightarrow$$

$$\left(x^3 - y^3\right)dx + xy^2dy = 0$$

Perceba que trata-se de uma ***equação homogênea****, e colocando x^3 em evidêcia tem-se*

$$x^3\left\{\left[1 - \left(\frac{y}{x}\right)^3\right]dx + \left(\frac{y}{x}\right)^2 dy\right\} = 0 \Rightarrow$$

$$\left[1 - \left(\frac{y}{x}\right)^3\right]dx + \left(\frac{y}{x}\right)^2 dy = 0$$

Considere a seguinte mudança de variável

$$u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux$$

disto segue-se,

$$dy = x\,du + u\,dx$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$\left(1 - u^3\right)dx + u^2\left(x\,du + u\,dx\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(1 - u^3 + u^3\right)dx + u^2xdu = 0 \Rightarrow$$

$$dx + u^2xdu = 0$$

que é uma equação separável, e disto segue-se que

$$dx = -u^2x\,du \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = -u^2du \quad \Rightarrow$$

$$\int\frac{dx}{x} = -\int u^2du$$

Ou seja

$$\ln|x| = -\tfrac{1}{3}u^3 + c_0 \quad \Rightarrow$$

$$\ln|x| + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{y}{x}\right)^3 = c_0 \quad \Rightarrow$$

$$y^3 = 3c_0x^3 - 3x^3\ln|x| \quad \Rightarrow$$

$$y = \sqrt[3]{c_1x^3 - 3x^3\ln|x|} \quad \Rightarrow$$

$$y = x\sqrt[3]{c_1 - 3\ln|x|}$$

onde $c_1 = 3c_0$ e $c_0 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Observe que a equação diferencial*

$$y' = y\left(xy^3 - 1\right)$$

pode ser reescrita como

$$\frac{dy}{dx} + y = xy^4 \Leftrightarrow \frac{1}{y^4}\frac{dy}{dx} + y^{-3} = x$$

que é uma ***equação de Bernoulli****. Considere a seguinte mudança de variável*

$$u = y^{-3}$$

disto segue-se,

$$-\frac{1}{3}\frac{du}{dx} = \frac{1}{y^4}\frac{dy}{dx}$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$\frac{du}{dx} - 3u = -3x,$$

que é uma ***equação linear*** *com*

$$p(x) = -3$$

$$g(x) = -3x$$

Considere portanto,

$$\eta(x) = \int p(x)dx$$

$$= -3\int dx$$

$$= -3x + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}$$

e, tomando $c_0 = 0$, tem-se

$$\mu(x) = e^{\eta(x)}$$

$$= e^{-3x}$$

Segue-se que

$$q(x) = \int \mu(x)g(x)dx$$

$$= -3\int xe^{-3x}dx = \frac{1}{3}e^{-3x}\left(3x+1\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(3x+1\right)e^{-3x} + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$$

e

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{q(x)}{\mu(x)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}\,(3x+1)\,e^{-3x} + c_1}{e^{-3x}} \\ &= c_1 e^{3x} + x + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$y^{-3} = c_1 e^{3x} + x + \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{c_1 e^{3x} + x + \frac{1}{3}}}$$

■