Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito Prova **2025**
Data: Quinta-feira, 10 de Julho **Turma M4**

Exercício 1 *Observe que a equação*

$$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sec x$$

pode ser reescrita da seguinte forma

$$y' + (\mathrm{tg}\,x)\ y = \sec x,$$

o que a caracteriza como uma ***equação diferencial linear****, em que*

$$p(x) = \mathrm{tg}\,x$$
$$f(x) = \sec x$$

Desta forma, considere

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \int p(x)dx \\ &= \int \mathrm{tg}\,x\,dx \\ &= -\ln|\cos x| + c_0,\ \ c_0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Tomando $c_0 = 0$, tem-se

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{-\ln|\cos x|} \\ &= e^{\ln|\cos x|^{-1}} \\ &= \frac{1}{|\cos x|} \\ &= \pm\frac{1}{\cos x}\end{aligned}$$

Escolhendo

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \frac{1}{\cos x} \\ &= \sec x\end{aligned}$$

segue-se que,

$$\begin{aligned}q(x) &= \int \mu(x)f(x)dx \\ &= \int \sec x\ \sec x\,dx \\ &= \int \sec^2 x dx \\ &= \mathrm{tg}\,x + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{\mathrm{tg}\,x + c_1}{\sec x} \\ &= \cos x\,(\mathrm{tg}\,x + c_1) \\ &= \mathrm{sen}\,x + c_1\cos x\end{aligned}$$

Sabe-se que

$$y(\pi) = 1$$

e disto segue-se que

$$\begin{aligned}\mathrm{sen}\,\pi + c_1\cos\pi &= 1 \qquad \Rightarrow \\ -c_1 &= 1 \qquad \Rightarrow \\ c_1 &= -1\end{aligned}$$

e, portanto

$$y(x) = \mathrm{sen}\,x - \cos x$$

■

Exercício 2 *Observe inicialmente que a* ***edo*** *em questão,*

$$y'' + 4y' + 3y = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

possui equação homogênea associada

$$y'' + 4y' + 3y = 0,$$

cuja equação característica é

$$m^2 + 4m + 3 = 0,$$

cujas soluções são

$$m_1 = -1$$

$$m_2 = -3$$

*Ou seja, o **conjunto fundamental de soluções** da equação homogênea em questão é*

$$y_1 = e^{m_1 x} = e^{-x}$$

$$y_2 = e^{m_2 x} = e^{-3x}$$

*Logo, a **solução complementar** da equação é*

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} \end{aligned}$$

com c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

*É necessário agora, encontrar uma **solução particular** da **edo** original. Para isto considere a seguinte proposta de solução*

$$y_p = Ae^x + Bxe^{-x}$$

Observe que

$$y_p' = Ae^x + B\left(1 - x\right)e^{-x}$$

$$y_p'' = Ae^x + B\left(-2 + x\right)e^{-x}$$

Substituindo na equação, tem-se

$$\begin{aligned} &Ae^x + B\left(-2+x\right)e^{-x} + 4Ae^x + \\ &+4B\left(1-x\right)e^{-x} + 3Ae^x + 3Bxe^{-x} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow \\ &\qquad 8Ae^x + 2Be^{-x} = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} 8A = \dfrac{1}{2} \\ 2B = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{16} \\ B = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

e,

$$y_p = \frac{1}{16}e^x + \frac{1}{4}xe^{-x}$$

e a solução geral que deseja-se encontrar é dada por

$$\begin{aligned} y_g &= y_c + y_p \\ &= c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{16}e^x + \frac{1}{4}xe^{-x} \\ &= c_2 e^{-3x} + \left(c_1 + \frac{x}{4}\right)e^{-x} + \frac{1}{16}e^x \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Observe que a equação dada*

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x},\ x > 0$$

pode ser reescrita como

$$x^2 y'' + xy' + y = x$$

Perceba que a equação homogênea associada é

$$x^2 y'' + xy' + y = 0$$

*que é uma **Equação de Cauchy-Euler**, cuja **equação caracteristica** é*

$$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm \mathbf{i}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta &= 1 \end{aligned}$$

cujas soluções são

$$y_1 = \cos\left(\ln x\right)$$

$$y_2 = \operatorname{sen}\left(\ln x\right)$$

Logo, a solução complementar da equação dada é

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 \cos\left(\ln x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\ln x\right),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

*Usando o **método dos coeficientes a determinar**, para encontrar uma solução particular, considere a seguinte proposta*

$$y_p = Ax + B$$

Observe que

$$y_p' = A$$

$$y_p'' = 0$$

Substituindo na edo original, tem-se

$$x^2 y_p'' + xy_p' + y_p = x \Rightarrow$$

$$0 + Ax + Ax + B = x \Rightarrow$$

$$2Ax + B = x$$

Ou seja

$$A = \frac{1}{2}$$

$$B = 0$$

e

$$y_p = \frac{x}{2}$$

Por fim, a solução geral do problema é dada por

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1 \cos(\ln x) + c_2 \text{sen}(\ln x) + \frac{x}{2} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Usando frações parciais, tem-se que*

$$\begin{aligned} \frac{2s-1}{s^2(s+1)^3} &= \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s+1} + \frac{d}{(s+1)^2} + \frac{e}{(s+1)^3} \\ &= \frac{(a+c)s^4 + (3a+b+2c+d)s^3}{s^2(s+1)^3} + \\ &+ \frac{(3a+3b+c+d+e)s^2 + (a+3b)s + b}{s^2(s+1)^3} \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ 3a + b + 2c + d = 0 \\ 3a + 3b + c + d + e = 0 \\ a + 3b = 2 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = -1 \\ c = -5 \\ d = -4 \\ e = -3 \end{cases}$$

Donde segue-se que

$$\frac{2s-1}{s^2(s+1)^3} = \frac{5}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{5}{s+1} - \frac{4}{(s+1)^2} - \frac{3}{(s+1)^3}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-1}{s^2(s+1)^3}\right\} &= 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \\ &- 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \\ &- 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} - \\ &- \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^3}\right\} \\ &= 5 - t - 5e^{-t} - 4te^{-t} - \frac{3}{2}t^2e^{-t} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Observe que $x = 0$ é um ponto **singular regular** da **edo***

$$4xy'' + \frac{1}{2}y' + y = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Segue-se disto, que

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} \end{aligned}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$4xy'' + \tfrac{1}{2}y' + y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$4x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + \\ +\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \\ +\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + \\ +\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \\ +\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} + \right. \\ \left. +\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n}\right] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} + \\ +\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n-1} + \\ +\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} + \\ +\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n-1} + \\ +\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1} x^{n-1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$4r(r-1)a_0x^{-1} + \\ +\sum_{n=1}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} + \\ +\tfrac{1}{2}ra_0x^{-1} + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)a_n x^{n-1} + \\ +\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1} x^{n-1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(4r-\tfrac{7}{2}\right)ra_0x^{-1} + \\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(4n+4r-\tfrac{7}{2}\right)(n+r)a_n + a_{n-1}\right]x^{n-1} = 0$$

Portanto, a ***equação indicial*** *é dada por*

$$\left(4r-\frac{7}{2}\right)r\,a_0 = 0$$

ou seja,

$$r = 0 \,ou\, r = \frac{7}{8}$$

Além disto, tem-se também que

$$\left(4n+4r-\frac{7}{2}\right)(n+r)a_n + a_{n-1} = 0$$

donde segue-se a seguinte ***relação de recorrência***

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{\left(4n+4r-\frac{7}{2}\right)(n+r)}$$

Para $r=0$, tal relação torna-se

$$a_n = -\frac{2a_{n-1}}{n\,(8n-7)}$$

Supondo $a_0 = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} a_1 &= -2 \\ a_2 &= \frac{2}{9} \\ a_3 &= -\frac{4}{459} \\ a_4 &= \frac{2}{11\,475} \\ a_n &= -\frac{4}{1893\,375} \end{aligned}$$

e, uma solução da equação dada é

$$y_1 = 1 - 2x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{459}x^3 + \frac{2}{11\,475}x^4 - \\ -\frac{4}{1893\,375}x^5 + \cdots$$

■