Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 3$^{\text{a}}$ Prova **2025**
Data: Domingo, 6 de Julho **Turma M4**

Exercício 1 *Observe que o termo geral desta série é dado por*

$$a_n = \frac{n}{n+1}\,(-2x)^{n-1}$$

Assim,

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\,(-2x)^{n}$$

e,

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{n+1}{n+2}\,(-2x)^n\,\frac{n+1}{n(-2x)^{n-1}}\right| \\ &= \left|\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}(-2x)\right| \\ &= \frac{2(n+1)^2}{n(n+2)}\,|x|\end{aligned}$$

Usando o ***teste da razão****, tem-se que,*

$$\begin{aligned}L &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{2(n+1)^2}{n(n+2)}\,|x| \\ &= 2\,|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \\ &= 2\,|x|\end{aligned}$$

e a série será ***convergente*** *quando $L < 1$, ou seja*

$$2\,|x| < 1 \Rightarrow$$
$$-1 < 2x < 1 \Rightarrow$$
$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

Ou seja, o ***intervalo de convergência*** *da série é* $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ■

Exercício 2 *Observe que $x = 0$ é um ponto ordinário da* ***edo***

$$(x^2+1)y'' - 6y = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned}&(x^2+1)y'' - 6y = 0 \quad \Rightarrow \\ &(x^2+1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \\ &\qquad -6\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow \\ &x^2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \\ &+\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \\ &\qquad -6\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow \\ &\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n} + \\ &+\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \\ &\qquad -6\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow \\ &\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n} + \\ &\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^{n} - \\ &\qquad -6\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n +$$
$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n -$$
$$-6a_0 - 6a_1 x - 6\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 0 \Rightarrow$$

$$(2a_2 - 6a_0) + (6a_3 - 6a_1)\,x +$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\Big[(n^2-n-6)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2}\Big]x^n = 0$$

Logo,

$$\begin{cases} a_2 = 3a_0 \\ a_3 = a_1 \\ a_{n+2} = -\dfrac{(n^2-n-6)}{(n+2)(n+1)}a_n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_2 = 3a_0 \\ a_3 = a_1 \\ a_{n+2} = -\dfrac{n-3}{(n+1)}a_n \end{cases}$$

Supondo agora $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, tem-se,

$$a_2 = 3$$
$$a_3 = 0$$
$$a_4 = 1$$
$$a_5 = 0$$
$$a_6 = -\frac{1}{5}$$
$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_1 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$
$$= 1 + 3x^2 - x^4 + \frac{1}{5}x^6 + \cdots$$

Supondo agora $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, tem-se,

$$a_2 = 0$$
$$a_3 = 1$$
$$a_4 = 0$$
$$a_5 = 0$$
$$a_6 = 0$$
$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_2 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$
$$= x + x^3$$

e a solução geral da equação é

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Observe que $x = 0$ é um ponto **singular regular** da **edo***

$$4xy'' + \frac{1}{2}y' + y = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}$$
$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$4xy'' + \tfrac{1}{2}y' + y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$4x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + $$
$$+\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + $$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + $$
$$+\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + $$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} + \right.$$
$$\left. +\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n}\right] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} + $$
$$+\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n-1} + $$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} + $$
$$+\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n-1} + $$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1} x^{n-1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$4r(r-1)a_0 x^{-1} + $$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} + $$
$$+\tfrac{1}{2}ra_0 x^{-1} + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)a_n x^{n-1} + $$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1} x^{n-1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(4r - \tfrac{7}{2}\right) ra_0 x^{-1} + $$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(4n + 4r - \tfrac{7}{2}\right)(n+r)a_n + a_{n-1}\right] x^{n-1} = 0$$

Portanto, a ***equação indicial*** *é dada por*

$$\left(4r - \frac{7}{2}\right) r\, a_0 = 0$$

ou seja,

$$r = 0 \, ou \, r = \frac{7}{8}$$

Além disto, tem-se também que

$$\left(4n + 4r - \frac{7}{2}\right)(n+r)a_n + a_{n-1} = 0$$

donde segue-se a seguinte ***relação de recorrência***

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{\left(4n + 4r - \frac{7}{2}\right)(n+r)}$$

Para $r = 0$, tal relação torna-se

$$a_n = -\frac{2a_{n-1}}{n\,(8n-7)}$$

Supondo $a_0 = 1$, tem-se

$$a_1 = -2$$
$$a_2 = \frac{2}{9}$$
$$a_3 = -\frac{4}{459}$$
$$a_4 = \frac{2}{11\,475}$$
$$a_n = -\frac{4}{1893\,375}$$

e, uma solução da equação dada é

$$y_1 = 1 - 2x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{459}x^3 + \frac{2}{11\,475}x^4 - $$
$$- \frac{4}{1893\,375}x^5 + \cdots$$

■

Exercício 4 *Usando frações parciais, tem-se que*

$$\frac{2s-1}{s^2(s+1)^3} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s+1} + \frac{d}{(s+1)^2} + \frac{e}{(s+1)^3}$$

$$= \frac{(a+c)s^4 + (3a+b+2c+d)s^3}{s^2(s+1)^3} + $$

$$+ \frac{(3a+3b+c+d+e)s^2 + (a+3b)s + b}{s^2(s+1)^3}$$

Ou seja

$$\begin{cases} a+c=0 \\ 3a+b+2c+d=0 \\ 3a+3b+c+d+e=0 \\ a+3b=2 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a=5 \\ b=-1 \\ c=-5 \\ d=-4 \\ e=-3 \end{cases}$$

Donde segue-se que

$$\frac{2s-1}{s^2(s+1)^3} = \frac{5}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{5}{s+1} - \frac{4}{(s+1)^2} - \frac{3}{(s+1)^3}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-1}{s^2(s+1)^3}\right\} &= 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \\ &- 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \\ &- 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} - \\ &- \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^3}\right\} \\ &= 5 - t - 5e^{-t} - 4te^{-t} - \frac{3}{2}t^2e^{-t} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Utilizando a* ***Transformada de Laplace*** *para a resolução desta equação, observe que*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''-4y'+4y\} &= \mathcal{L}\left\{t^3e^{2t}\right\} \quad \Leftrightarrow \\ \mathcal{L}\{y''\} - 4\mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\left\{t^3\right\}\Big|_{s\to s-2} \end{aligned}$$

Considerando

$$Y = \mathcal{L}\{y\},$$

a equação anterior pode ser reescrita como

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) - 4\left[sY - y(0)\right] + 4Y = \frac{6}{(s-2)^4}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \left(s^2-4s+4\right)Y &= \frac{6}{(s-2)^4} \Rightarrow \\ (s-2)^2\,Y &= \frac{6}{(s-2)^4} \Rightarrow \\ Y &= \frac{6}{(s-2)^6} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}^{-1}\{Y\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{(s-2)^6}\right\} \\ &= \frac{6}{5!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5!}{(s-2)^6}\right\} \\ &= \frac{6}{5!}t^5e^{2t} \end{aligned}$$

ou seja,

$$y = \frac{1}{20}t^5e^{2t}$$

■