Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1º Semestre

Gabarito 2ª Prova **2025**
Data: Quarta-feira, 28 de Maio **Turma M4**

Exercício 1 *Observe que a equação*

$$(2x+1)y'' - 4\,(x+1)\,y' + 4y = 0,$$

pode ser reescrita em sua ***forma padrão*** *da seguinte forma,*

$$y'' - \frac{4\,(x+1)}{2x+1}y' + \frac{4}{2x+1}y = 0$$

onde

$$P(x) = -\frac{4\,(x+1)}{2x+1}$$

Deseja-se encontrar uma outra solução desta equação sabendo que

$$y_1 = e^{2x}$$

é uma solução. Usando da ***redução de ordem****, considere*

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int -P(x)dx \\ &= \int \frac{4\,(x+1)}{2x+1}dx \\ &= \int \left(2 + \frac{2}{2x+1}\right)dx \\ &= 2x + \ln|2x+1| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tomando $c_0 = 0$, segue-se que

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{2x+\ln|2x+1|} \\ &= e^{2x}e^{\ln|2x+1|} \\ &= \pm\,(2x+1)\,e^{2x} \end{aligned}$$

Escolhendo

$$\mu(x) = (2x+1)\,e^{2x}$$

Logo,

$$\begin{aligned} u(x) &= \int \frac{\mu(x)}{y_1^2}dx \\ &= \int \frac{(2x+1)\,e^{2x}}{e^{4x}}dx \\ &= \int \frac{(2x+1)}{e^{2x}}dx \\ &= -e^{-2x}(x+1) + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tomando $c_1 = 0$, tem-se,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= u(x)y_1(x) \\ &= -e^{-2x}(x+1)e^{2x} \\ &= -(x+1) \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Perceba que a equação dada,*

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$$

possui equação auxiliar dada por

$$m^4 - 5m^2 + 4 = 0$$

Considerando

$$\omega = m^2,$$

a equação anterior torna-se

$$\omega^2 - 5\omega + 4 = 0$$

cuja soluçõessão

$$\omega_1 = 1$$

$$\omega_2 = 4$$

Voltando à equação em m, tem-se para $\omega_1 = 1$,

$$m^2 = \omega_1 = 1$$

ou seja

$$m_1 = 1$$

$$m_2 = -1$$

e para $\omega_2 = 4$ *tem-se*

$$m^2 = \omega_2 = 4$$

ou seja,

$$m_3 = 2$$

$$m_4 = -2$$

Assim, o ***conjunto fundamental de soluções*** *da equação diferencial em questão é*

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{m_1 x} \\ &= e^{x} \\ y_2 &= e^{m_2 x} \\ &= e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 &= e^{m_3 x} \\ &= e^{2x} \\ y_4 &= e^{m_4 x} \\ &= e^{-2x} \end{aligned}$$

Logo, a ***solução geral*** *da equação é*

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4 \\ &= c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} \end{aligned}$$

com $c_1,\ c_2,\ c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Observe inicialmente que a* ***edo*** *em questão,*

$$y'' + 4y' + 3y = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

possui equação homogênea associada

$$y'' + 4y' + 3y = 0,$$

cuja equação característica é

$$m^2 + 4m + 3 = 0,$$

cujas soluções são

$$m_1 = -1$$

$$m_2 = -3$$

Ou seja, o ***conjunto fundamental de soluções*** *da equação homogênea em questão é*

$$y_1 = e^{m_1 x} = e^{-x}$$

$$y_2 = e^{m_2 x} = e^{-3x}$$

Logo, a ***solução complementar*** *da equação é*

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} \end{aligned}$$

com $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$.

É necessário agora, encontrar uma ***solução particular*** *da* ***edo*** *original. Para isto considere a seguinte proposta de solução*

$$y_p = Ae^{x} + Bxe^{-x}$$

Observe que

$$y_p' = Ae^{x} + B\left(1 - x\right) e^{-x}$$

$$y_p'' = Ae^{x} + B\left(-2 + x\right) e^{-x}$$

Substituindo na equação, tem-se

$$\begin{aligned} Ae^{x} + B\left(-2 + x\right) e^{-x} + 4Ae^{x} + & \\ +4B\left(1 - x\right) e^{-x} + 3Ae^{x} + 3Bxe^{-x} &= \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \Rightarrow \\ 8Ae^{x} + 2Be^{-x} &= \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} 8A = \dfrac{1}{2} \\ 2B = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{16} \\ B = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

e,

$$y_p = \frac{1}{16}e^{x} + \frac{1}{4}xe^{-x}$$

e a solução geral que deseja-se encontrar é dada por

$$\begin{aligned} y_g &= y_c + y_p \\ &= c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{16}e^{x} + \frac{1}{4}xe^{-x} \\ &= c_2 e^{-3x} + \left(c_1 + \frac{x}{4}\right) e^{-x} + \frac{1}{16}e^{x} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Observe inicialmente que a equação homogênea associada ao PVI dado é*

$$y'' + y = 0$$

cuja equação associada é dada por

$$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm \mathbf{i}$$

ou seja

$$\alpha = 0$$
$$\beta = 1$$

e

$$y_1 = \cos x$$

$$y_2 = \operatorname{sen} x$$

e a solução complementar é

$$y_c = c_1 y_1 y_2$$

$$= c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

*Usando agora o **método da variação dos parâmetros** para encontrar uma solução particular, segue-se que*

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}$$

$$= 1$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, \ f(x) = \operatorname{sen}^2 x$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen}^2 x & \cos x \end{vmatrix}$$

$$= -\operatorname{sen}^3 x$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \operatorname{sen}^2 x \end{vmatrix}$$

$$= \cos x \operatorname{sen}^2 x$$

e,

$$u_1' = \frac{W_1}{W}$$

$$= -\operatorname{sen}^3 x$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W}$$

$$= \cos x \operatorname{sen}^2 x$$

Ou seja

$$u_1 = \int -\operatorname{sen}^3 x \, dx$$

$$= -\int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$= -\int \left(1 - \cos^2 x\right) \operatorname{sen} x \, dx$$

$$= \cos x - \frac{\cos^3 x}{3} + c_1$$

$$u_2 = \int u_2' dx$$

$$= \int \cos x \operatorname{sen}^2 x dx$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + c_2$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Considerando* $c_1 = c_2 = 0$ *, segue-se que, uma **solução particular** da equação é*

$$y_p = y_1 u_1 + y_2 u_2$$

$$= \cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{3} + \frac{\operatorname{sen}^4 x}{3}$$

Assim, a solução geral da equação é dada por

$$y = y_c + y_p$$
$$= c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{3} + \frac{\operatorname{sen}^4 x}{3}$$

Uma vez que, $y(0) = 1$ *e* $y'(0) = 0$*, segue-se que*

$$c_1 = \frac{1}{3}$$
$$c_2 = 0$$

e por fim, temos

$$y = \frac{1}{3} \cos x + \cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{3} + \frac{\operatorname{sen}^4 x}{3}$$

■

Exercício 5 *Observe que a equação dada*

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x},\ x > 0$$

pode ser reescrita como

$$x^2y'' + xy' + y = x$$

Perceba que a equação homogênea associada é

$$x^2y'' + xy' + y = 0$$

que é uma ***Equação de Cauchy-Euler****, cuja* ***equação caracteristica*** *é*

$$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm\mathbf{i}$$

ou seja

$$\alpha = 0$$
$$\beta = 1$$

cujas soluções são

$$y_1 = \cos(\ln x)$$

$$y_2 = \text{sen}(\ln x)$$

Logo, a solução complementar da equação dada é

$$\begin{aligned} y_c &= c_1y_1 + c_2y_2 \\ &= c_1\cos(\ln x) + c_2\text{sen}(\ln x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Usando o ***método dos coeficientes a determinar****, para encontrar uma solução particular, considere a seguinte proposta*

$$y_p = Ax + B$$

Observe que

$$y_p' = A$$

$$y_p'' = 0$$

Substituindo na edo original, tem-se

$$x^2y_p'' + xy_p' + y_p = x \Rightarrow$$

$$0 + Ax + Ax + B = x \Rightarrow$$

$$2Ax + B = x$$

Ou seja

$$A = \frac{1}{2}$$

$$B = 0$$

e

$$y_p = \frac{x}{2}$$

Por fim, a solução geral do problema é dada por

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1\cos(\ln x) + c_2\text{sen}(\ln x) + \frac{x}{2} \end{aligned}$$

■