Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 1ª Prova — **2025**
Data: Quarta-feira, 09 de Abril — **Turma M4**

Exercício 1 *Observe que a equação*

$$y' + y\,\text{tg}\,x = \sec x$$

pode ser reescrita da seguinte forma

$$y' + (\text{tg}\,x)\ y = \sec x,$$

*o que a caracteriza como uma **equação diferencial linear**, em que*

$$p(x) = \text{tg}\,x$$
$$f(x) = \sec x$$

Desta forma, considere

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \int p(x)dx \\ &= \int \text{tg}\,x\,dx \\ &= -\ln|\cos x| + c_0,\ \ c_0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Tomando $c_0 = 0$, tem-se

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{-\ln|\cos x|} \\ &= e^{\ln|\cos x|^{-1}} \\ &= \frac{1}{|\cos x|} \\ &= \pm\frac{1}{\cos x}\end{aligned}$$

Escolhendo

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \frac{1}{\cos x} \\ &= \sec x\end{aligned}$$

segue-se que,

$$\begin{aligned}q(x) &= \int \mu(x)f(x)dx \\ &= \int \sec x\ \sec x\,dx \\ &= \int \sec^2 x dx \\ &= \text{tg}\,x + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{\text{tg}\,x + c_1}{\sec x} \\ &= \cos x\,(\text{tg}\,x + c_1) \\ &= \text{sen}\,x + c_1\cos x\end{aligned}$$

Sabe-se que

$$y(\pi) = 1$$

e disto segue-se que

$$\begin{aligned}\text{sen}\,\pi + c_1\cos\pi &= 1 \quad \Rightarrow \\ -c_1 &= 1 \quad \Rightarrow \\ c_1 &= -1\end{aligned}$$

e, portanto

$$y(x) = \text{sen}\,x - \cos x$$

■

Exercício 2 *Deseja-se resolver a equação*

$$\left(2 + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$$

Para isso, considere

$$M(x,y) = 2 + \frac{y}{x^2}$$
$$N(x,y) = y - \frac{1}{x}$$

e observe que,

$$M_y(x,y) = \frac{1}{x^2}$$
$$N_x(x,y) = \frac{1}{x^2}$$

Ou seja,

$$M_y(x,y) = N_x(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

o que permite afirmar que a equação em questão é ***exata*** *e, portanto existe uma função $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = M(x,y) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = N(x,y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 2 + \dfrac{y}{x^2} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = y - \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Ou seja,

$$\varphi(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} + 2x + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$$

e a solução da equação em questão é

$$\varphi(x,y) = c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

Ou seja

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} + 2x = c,\ c \in \mathbb{R}$$

■

Exercício 3 *Para a resolução da equação*

$$ydx + \left(2xy - e^{-2y}\right) dy = 0,$$

considere

$$M(x,y) = y$$

$$N(x,y) = 2xy - e^{-2y}$$

e observe que

$$N_x = 2y$$

$$M_y = 1$$

e

$$\begin{aligned} P(y) &= \frac{N_x - M_y}{M} \\ &= \frac{2y-1}{y} \\ &= 2 - \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int P(x)dx \\ &= \int \left(2 - \frac{1}{y}\right) dy \\ &= 2y - \ln|y| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tomando $c_0 = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \mu(y) &= e^{\eta(y)} \\ &= e^{2y} e^{\ln|y|^{-1}} \\ &= \frac{e^{2y}}{|y|} \\ &= \pm \frac{e^{2y}}{y} \end{aligned}$$

Escolhendo

$$\mu(y) = \frac{e^{2y}}{y}$$

e multiplicando a equação dada por μ, tem-se

$$\left[e^{2y}dx + \left(2xe^{2y} - \frac{1}{y}\right) dy\right] = 0$$

que, agora é ***exata****. Logo, existe uma função $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = e^{2y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 2xe^{2y} - \dfrac{1}{y} \end{cases}$$

Ou seja,

$$\varphi(x,y) = xe^{2y} - \ln|y| + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

e a solução da equação em questão é, portanto

$$\varphi(x,y) = c_3,\ c_3 \in \mathbb{R}$$

Ou seja

$$xe^{2y} - \ln|y| = c,\ c \in \mathbb{R}$$

■

Exercício 4 *Observe que a equação*

$$xy' - y = x\,\mathrm{tg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

pode ser reescrita da seguinte maneira

$$x\frac{dy}{dx} - y - x\,\mathrm{tg}\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$x\,dy - \left[y + x\,\mathrm{tg}\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx = 0 \Rightarrow$$

$$\left[y + x\,\mathrm{tg}\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx - x\,dy = 0$$

Perceba que trata-se de uma equação homogênea, e colocando x em evidêcia tem-se

$$x\left\{\left[\frac{y}{x} + \mathrm{tg}\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx - dy\right\} = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{y}{x} + \mathrm{tg}\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx - dy = 0$$

Considere a seguinte mudança de variável

$$u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux$$

disto segue-se,

$$dy = x\,du + u\,dx$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$[u + \mathrm{tg}\,(u)]\,dx - (x\,du + u\,dx) = 0 \Rightarrow$$

$$(u + \mathrm{tg}\,u - u)\,dx - xdu = 0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{tg}\,u\,dx - xdu = 0$$

que é uma equação separável, e disto segue-se que

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\mathrm{tg}\,u} \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{\cos u}{\mathrm{sen}\,u}du \Rightarrow$$

$$\int\frac{dx}{x} = \int\tfrac{\cos u}{\mathrm{sen}\,u}du$$

Ou seja

$$\ln|x| = \ln|\mathrm{sen}\,u| + c_0 \Rightarrow$$

$$\ln|x| - \ln\left|\mathrm{sen}\,\left(\tfrac{y}{x}\right)\right| = c_0 \Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{x}{\mathrm{sen}\,\left(\frac{y}{x}\right)}\right| = c_0 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{\mathrm{sen}\,\left(\frac{y}{x}\right)} = e^{c_0} \Rightarrow$$

$$x - c_1\mathrm{sen}\,\left(\tfrac{y}{x}\right) = 0$$

onde $c_1 = e^{c_0}$ e $c_0 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Observe que a equação diferencial*

$$x\frac{dy}{dx} - (1+x)\,y = xy^2$$

pode ser reescrita como

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1+x}{x}y = y^2 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} - \frac{1+x}{x}y^{-1} = 1$$

que é uma ***equação de Bernoulli****. Considere a seguinte mudança de variável*

$$u = y^{-1}$$

disto segue-se,

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$\frac{du}{dx} + \frac{1+x}{x}u = -1,$$

que é uma ***equação linear*** *com*

$$p(x) = \frac{1+x}{x}$$

$$g(x) = -1$$

Considere portanto,

$$\eta(x) = \int p(x)dx$$

$$= \int\left(\frac{1+x}{x}\right)dx$$

$$= x + \ln|x| + c_0,\ \ c_0 \in \mathbb{R}$$

e, tomando $c_0 = 0$, tem-se

$$\mu(x) = e^{\eta(x)}$$

$$= e^{x+\ln|x|}$$

$$= |x|\,e^x$$

$$= \pm x\,e^x$$

Escolhendo

$$\mu(x) = x\,e^x$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} q(x) &= \int \mu(x) g(x) dx \\ &= -\int x\, e^x dx \\ &= e^x\,(1-x) + c_1,\ \ c_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{q(x)}{\mu(x)} \\ &= \frac{e^x\,(1-x)+c_1}{x\,e^x} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y^{-1} &= \frac{e^x\,(1-x)+c_1}{x\,e^x} \Rightarrow \\ y &= \frac{x\,e^x}{e^x\,(1-x)+c_1} \end{aligned}$$

■