Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito Prova Final **2024**
Data: Quarta-feira, 11 de Dezembro **Turma E4**

Exercício 1 *Observe que a equação diferencial*

$$xy\,dy = \left(y^2 + x\right)dx$$

pode ser reescrita como

$$y' - \frac{1}{x}y = y^{-1} \Leftrightarrow yy' - \frac{1}{x}y^2 = 1$$

*que é uma **equação de Bernoulli**.Considere a seguinte mudança de variável*

$$u = y^2$$

disto segue-se,

$$u' = 2yy'$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$u' - \frac{2}{x}u = 2,$$

*que é uma **equação linear** com*

$$p(x) = -\frac{2}{x}$$

$$g(x) = 2$$

Considere portanto,

$$\eta(x) = \int p(x)dx$$

$$= -2\int \frac{dx}{x}$$

$$= -2\ln|x| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}$$

e

$$\mu(x) = e^{\eta(x)}$$

$$= e^{-2\ln|x|+c_0}$$

$$= \frac{e^{c_0}}{x^2}$$

$$= \frac{c_1}{x^2},\ c_1 = e^{c_0}$$

Tomando $c_1 = 1$, segue-se que

$$q(x) = \int \mu(x)g(x)dx$$

$$= \int \frac{2dx}{x^2}$$

$$= -\frac{2}{x} + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

e

$$u(x) = \frac{q(x)}{\mu(x)}$$

$$= \frac{-\frac{2}{x} + c_2}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= c_2x^2 - 2x$$

Ou seja,

$$y^2 = c_2x^2 - 2x \Rightarrow$$

$$y = \sqrt{c_2x^2 - 2x}$$

■

Exercício 2 *Observe que a **equação auxiliar** da **equação homogênia associada** é dada por*

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 0$$

ou sejam

$$m_1 = m_2 = 1$$

*e o **conjunto fundamental** de soluções é*

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{m_1 x} \\ &= e^x \\ y_2 &= x\,y_1 \\ &= xe^x \end{aligned}$$

Usando o ***método da variação de parâmetros****, tem-se que*

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (1+x)\, e^x \end{vmatrix} \\ &= e^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, \ f = e^x\sqrt{x} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ e^x\sqrt{x} & (1+x)\, e^x \end{vmatrix} \\ &= -xe^{2x}\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^x\sqrt{x} \end{vmatrix} \\ &= e^{2x}\sqrt{x} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} \\ &= \frac{-xe^{2x}\sqrt{x}}{e^{2x}} \\ &= -x\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{W_2}{W} \\ &= \frac{e^{2x}\sqrt{x}}{e^{2x}} \\ &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

Ou seja

$$u_1 = -\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + c_0$$

$$u_2 = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c_1$$

com $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$*. Considerando* $c_0 = c_0 = 0$ *e* $x > 0$*, segue-se que, uma* ***solução particular*** *da equação é*

$$\begin{aligned} y_p &= y_1u_1 + y_2u_2 \\ &= -\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}e^x + \frac{2}{3}x^2\sqrt{x}e^x \\ &= \frac{4}{15}x^2\sqrt{x}e^x \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Sendo esta um* ***equação de Euler****, segue-se ue sua* ***equação auxiliar*** *é dada por*

$$m^2 + 4m + 8 = 0$$

cujas raízes são

$$m_1 = -2 + 2\mathbf{i}$$

$$m_2 = -2 - 2\mathbf{i}$$

Ou seja,

$$\alpha = -2$$

$$\beta = \ \ 2$$

e, o ***conjunto fundamental*** *de soluções é*

$$\begin{aligned} y_1 &= x^\alpha \cos(\beta \ln x) \\ &= x^{-2}\cos(2\ln x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= x^\alpha \mathrm{sen}(\beta \ln x) \\ &= x^{-2}\mathrm{sen}(2\ln x) \end{aligned}$$

Portanto, a ***solução geral*** *é,*

$$\begin{aligned} y_g &= c_1y_1 + c_2y_2 \\ &= c_1x^{-2}\cos(2\ln x) + c_2x^{-2}\mathrm{sen}(2\ln x) \\ &= \frac{1}{x^2}\left[c_1\cos(2\ln x) + c_2\mathrm{sen}(2\ln x)\right] \end{aligned}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$*.* ■

Exercício 4 *Usando* ***frações parciais****, observe inicialmente que*

$$\frac{s^2+s+1}{(s^2+4)(s^2-9)} = \frac{3}{13}\frac{1}{s^2+4} - \frac{1}{13}\frac{s}{s^2+4} - \\ - \frac{7}{78}\frac{1}{s+3} + \frac{1}{6}\frac{1}{s-3}$$

Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+s+1}{(s^2+4)(s^2-9)}\right\} = \frac{3}{13}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} - \frac{1}{13}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \frac{7}{78}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$= \frac{3}{26}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{13}\cos 2t - \frac{7}{78}e^{-3t} + \frac{1}{6}e^{3t}$$

■

Exercício 5 *Utilizando a* ***Transformada de Laplace*** *para a resolução desta equação, observe que*

$$\mathcal{L}\{y''+3y'-4y\} = \mathcal{L}\left\{6e^{2t}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{L}\{y''\}+3\mathcal{L}\{y'\}-4\mathcal{L}\{y\} = 6\mathcal{L}\left\{e^{2t}\right\}$$

Considerando

$$Y = \mathcal{L}\{y\},$$

a equação anterior pode ser reescrita como

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 3\left[sY - y(0)\right] - 4Y = 6\mathcal{L}\left\{e^{2t}\right\}$$

Ou seja,

$$\left(s^2+3s-4\right)Y - 4s - 17 = \frac{6}{s-2} \Rightarrow$$

$$(s+4)(s-1)Y = \frac{4s^2+9s-28}{s-2} \Rightarrow$$

$$Y = \frac{4s^2+9s-28}{(s-1)(s-2)(s+4)}$$

Logo,

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s^2+9s-28}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}$$

Usando frações parciais, tem-se que

$$\frac{4s^2+9s-28}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{4s-7}{(s-1)(s-2)} = \frac{3}{s-1} + \frac{1}{s-2}$$

ou seja,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s^2+9s-28}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-1}+\frac{1}{s-2}\right\} = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = 3e^t + e^{2t}$$

Portanto,

$$y = 3e^t + e^{2t}$$

■