Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 3ª Prova **2024**
Data: Sexta-feira, 6 de Dezembro **Turma E4**

Exercício 1 *Observe que o termo geral desta série é dado por*

$$a_n = \frac{(-1)^n (x-1)^{2n}}{4^n}$$

Assim,

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^{2(n+1)}}{4^{n+1}}$$

e,

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(-1)^{n+1} (x-1)^{2(n+1)}}{4^{n+1}} \frac{4^n}{(-1)^n (x-1)^{2n}}\right| \\ &= \left|\frac{(-1)(x-1)^2}{4}\right| \\ &= \frac{(x-1)^2}{4}\end{aligned}$$

Usando o ***teste da razão****, tem-se que,*

$$\begin{aligned}L &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{(x-1)^2}{4} \\ &= \frac{(x-1)^2}{4}\end{aligned}$$

e a série será ***convergente*** *quando $L<1$, ou seja*

$$\begin{aligned}\tfrac{(x-1)^2}{4} < 1 &\Rightarrow \\ (x-1)^2 < 4 &\Rightarrow \\ \sqrt{(x-1)^2} < 2 &\Rightarrow \\ |x-1| < 2 &\Rightarrow \\ -2 < x-1 < 2 &\Rightarrow \\ -1 < x < 3&\end{aligned}$$

Ou seja, o ***intervalo de convergência*** *da série é $(-1,3)$.* ■

Exercício 2 *Observe que $x=0$ é um ponto ordinário da* ***edo***

$$(1+2x^2)y'' + 3xy' + y = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$(1+2x^2)y'' + 3xy' + y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}&(1+2x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \\ &+3x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1)a_n x^n + \\ &+\sum_{n=1}^{\infty} 3n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \\ &\sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1)a_n x^n + \\ &+\sum_{n=1}^{\infty} 3n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \\ &\sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1)a_n x^n + \\ &3a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} 3n a_n x^n + a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(2a_2 + a_0) + (6a_3 + 4a_1)\, x + \\ &\sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + \right. \\ &\left. + \left(2n(n-1) + 3n + 1\right) a_n\right] x^n = 0\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} a_2 = -\dfrac{a_0}{2} \\ a_3 = -\dfrac{2a_1}{3} \\ a_{n+2} = -\dfrac{2n^2+n+1}{(n+2)(n+1)}a_n \end{cases}$$

Supondo $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, tem-se,

$$a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 = \frac{11}{24}$$

$$a_5 = 0$$

$$a_6 = -\frac{407}{720}$$

$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_1 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{24}x^4 - \frac{407}{720}x^6 + \cdots$$

Supondo agora $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, tem-se,

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = -\frac{2}{3}$$

$$a_4 = 0$$

$$a_5 = \frac{11}{15}$$

$$a_6 = 0$$

$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_2 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots$$

$$= x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{15}x^5 - \cdots$$

e a solução geral da equação é

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Observe que $x = 0$ é um ponto **singular regular** da **edo***

$$4x^2y'' + 2xy' + (x-2)y = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned}
4x^2y'' + 2xy' + (x-2)y = 0 \quad &\Rightarrow \\
4x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2} + &\\
+2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1} + &\\
+(x-2)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r} = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r} + &\\
+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)a_nx^{n+r} + &\\
\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^{n+r} = 0 \quad &\Rightarrow \\
x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_nx^n + \right. &\\
\left. +\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)a_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^n\right] = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_nx^n + &\\
+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)a_nx^n + &\\
+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
4r(r-1)a_0 + 2ra_0 - 2a_0 + &\\
+\sum_{n=1}^{\infty}\left[4(n+r)(n+r-1)a_n + \right. &\\
\left. +2(n+r)a_n - 2a_n + a_{n-1}\right]x^n = 0 &
\end{aligned}$$

Portanto, a ***equação indicial*** *é dada por*

$$[4r(r-1)+2r-2]\,a_0=0 \Rightarrow$$
$$2r^2-r-1=0$$

ou seja,

$$r=1 \text{ ou } r=-\frac{1}{2}$$

Além disto, tem-se também que

$$[4(n+r)(n+r-1)+2(n+r)-2]\,a_n+a_{n-1}=0$$

donde segue-se a seguinte ***relação de recorrência***

$$a_n=-\frac{a_{n-1}}{4(n+r)(n+r-1)+2(n+r)-2}$$

Para $r=1$, tal relação torna-se

$$a_n=-\frac{a_{n-1}}{2n(2n+3)}$$

Supondo $a_0=1$, tem-se

$$a_1=-\frac{1}{10}$$
$$a_2=\frac{1}{280}$$
$$a_3=-\frac{1}{15120}$$
$$a_4=\frac{1}{1330560}$$
$$a_5=-\frac{1}{172972800}$$

e, uma solução da equação dada é

$$y_1=x-\frac{x^2}{10}+\frac{x^3}{280}-\frac{x^4}{15120}+ + \frac{x^5}{1330560}-\frac{x^6}{172972800}+\cdots$$

■

Exercício 4 *Inicialmente observe que*

$$\frac{4s^2+9s-28}{(s-1)(s-2)(s+4)}=\frac{(s+4)\,(4s-7)}{(s-1)(s-2)(s+4)} =\frac{4s-7}{(s-1)(s-2)}$$

e, usando ***frações parciais****, tem-se*

$$\frac{4s^2+9s-28}{(s-1)(s-2)(s+4)}=\frac{4s-7}{(s-1)(s-2)} =\frac{3}{s-1}+\frac{1}{s-2}$$

Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s^2+9s-28}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-1}+\frac{1}{s-2}\right\} =3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+ +\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} =3e^t+e^{2t}$$

■

Exercício 5 *Utilizando a* ***Transformada de Laplace*** *para a resolução desta equação, observe que*

$$\mathcal{L}\left\{y''+3y'-4y\right\}=\mathcal{L}\left\{6e^{2t}\right\} \Leftrightarrow$$
$$\mathcal{L}\left\{y''\right\}+3\mathcal{L}\left\{y'\right\}-4\mathcal{L}\left\{y\right\}=6\mathcal{L}\left\{e^{2t}\right\}$$

Considerando

$$Y=\mathcal{L}\left\{y\right\},$$

a equação anterior pode ser reescrita como

$$s^2Y-sy(0)-y'(0)+3\left[sY-y(0)\right]-4Y=6\mathcal{L}\left\{e^{2t}\right\}$$

Ou seja,

$$\left(s^2+3s-4\right)Y-4s-17=\frac{6}{s-2} \Rightarrow$$
$$(s+4)\,(s-1)\,Y=\frac{4s^2+9s-28}{s-2} \Rightarrow$$
$$Y=\frac{4s^2+9s-28}{(s-1)\,(s-2)\,(s+4)}$$

Logo,

$$y=\mathcal{L}^{-1}\left\{Y\right\} =\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s^2+9s-28}{(s-1)\,(s-2)\,(s+4)}\right\}$$

e, de acordo com o ***Exercício 4****, tem-se*

$$y=3e^t+e^{2t}$$

■