Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 2ª Prova **2024**
Data: Quarta-feira, 23 de Outubro **Turma E4**

Exercício 1 *Observe que a equação*

$$x^2(\ln x - 1)\, y'' - xy' + y = 0,$$

pode ser reescrita em sua ***forma padrão*** *da seguinte forma,*

$$y'' - \frac{1}{x(\ln x - 1)}y' + \frac{1}{x^2(\ln x - 1)}y = 0$$

onde

$$P(x) = -\frac{1}{x(\ln x - 1)}$$

Deseja-se encontrar uma outra solução desta equação sabendo que

$$y_1 = x$$

é uma solução. Usando da ***redução de ordem****, considere*

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \int -P(x)dx \\ &= \int \frac{1}{x(\ln x - 1)}dx \\ &= \ln|\ln x - 1| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Tomando $c_0 = 0$, segue-se que

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{\ln|\ln x - 1|} \\ &= |\ln x - 1| \\ &= \pm(\ln x - 1)\end{aligned}$$

Escolhendo

$$\mu(x) = \ln x - 1$$

Logo,

$$\begin{aligned}u(x) &= \int \frac{\mu(x)}{y_1^2}dx \\ &= \int \frac{\ln x - 1}{x^2}dx \\ &= -\frac{\ln x}{x} + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Tomando $c_1 = 0$, tem-se,

$$\begin{aligned}y_2(x) &= u(x)y_1(x) \\ &= -\frac{\ln x}{x}x \\ &= -\ln x\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Perceba que a equação dada,*

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$$

trata-se de uma ***equação de Cauchy-Euler****. Portanto, considere a seguinte proposta de solução*

$$y = x^m,\ m \in \mathbb{R}$$

Disto segue-se que

$$\begin{aligned}y' &= m\,x^{m-1} \\ y'' &= m(m-1)\,x^{m-2} \\ y''' &= m(m-1)(m-2)\,x^{m-3}\end{aligned}$$

Substituindo na ***edo*** *em questão, tem-se*

$$\begin{aligned}x^3\left[m(m-1)(m-2)x^{m-3}\right] - \\ -3x^2\left[m(m-1)x^{m-2}\right] + \\ +6x\left[m\,x^{m-1}\right] - 6\left[x^m\right] &= 0 \Rightarrow \\ m(m-1)(m-2)x^m - 3m(m-1)x^m + \\ +6m\,x^m - 6x^m &= 0 \Rightarrow \\ x^m\left[m(m-1)(m-2) - 3m(m-1) + \right. \\ \left. +6m - 6\right] &= 0 \Rightarrow \\ m(m-1)(m-2) - 3m(m-1) + 6m - 6 &= 0 \Rightarrow \\ m^3 - 6m^2 + 11m - 6 &= 0\end{aligned}$$

Perceba que

$$m_1 = 1$$

é uma solução desta equação e

$$m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = (m-1)\left(m^2 - 5m + 6\right)$$

Ou seja, as outras soluções desta equação são a raízes da equação

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

que são

$$m_2 = 2$$

$$m_3 = 3$$

*Assim, o **conjunto fundamental de soluções** da equação diferencial em questão é*

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{m_1} \\ &= x \\ y_2 &= x^{m_2} \\ &= x^2 \\ y_3 &= x^{m_3} \\ &= x^3 \end{aligned}$$

*Logo, a **solução geral** da equação é*

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \\ &= c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \end{aligned}$$

com c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Observe inicialmente que a **edo** em questão,*

$$y'' + 2y' - 15y = 3 + 2x \operatorname{sen} x$$

possui equação homogênea associada

$$y'' + 2y' - 15y = 0,$$

cuja equação característica é

$$m^2 + 2m - 15 = 0,$$

cujas soluções são

$$m_1 = 3$$

$$m_2 = -5$$

*Ou seja, o **conjunto fundamental de soluções** da equação homogênea em questão é*

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{m_1 x} \\ &= e^{3x} \\ y_2 &= e^{m_2 x} \\ &= e^{-5x} \end{aligned}$$

*Logo, a **solução complementar** da equação é*

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 e^{3x} + c_2 e^{-5x} \end{aligned}$$

com c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

*É necessário agora, encontrar uma **solução particular** da **edo** original.Para isto considere a seguinte proposta de solução*

$$y_p = A + (Bx + C) \operatorname{sen} x + (Dx + E) \cos x$$

Observe que

$$y_p' = (-Dx + B - E) \operatorname{sen} x + (Bx + C + D) \cos x$$

$$y_p'' = (-Bx - C - 2D) \operatorname{sen} x + (-Dx + 2B - E) \cos x$$

Substituindo na equação, tem-se

$$\begin{aligned} (-Bx - C - 2D) \operatorname{sen} x + (-Dx + 2B - E) \cos x + \\ +2\left[(-Dx + B - E) \operatorname{sen} x + (Bx + C + D) \cos x\right] - \\ -15\left[A + (Bx + C) \operatorname{sen} x + (Dx + E) \cos x\right] &= \\ 3 + 2x \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -15A + \\ +\left[(-16B - 2D)\, x + 2B - 16C - 2D - 2E\right] \operatorname{sen} x + \\ \left[(2B - 16D)\, x + 2B + 2C + 2D - 16E\right] \cos x &= \\ 3 + 2x \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} -15A = 3 \\ 2B - 16C - 2D - 2E = 0 \\ -16B - 2D = 2 \\ 2B - 16D = 0 \\ 2B + 2C + 2D - 16E = 0 \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{cases} A = -\dfrac{1}{5} \\ B = -\dfrac{8}{65} \\ C = -\dfrac{47}{4225} \\ D = -\dfrac{1}{65} \\ E = -\dfrac{79}{4225} \end{cases}$$

e,

$y_p = -\frac{1}{5} - \left(\frac{8}{65}x + \frac{47}{4225}\right)\operatorname{sen} x - \left(\frac{1}{65}x + \frac{79}{4225}\right)\cos x$

e a solução geral que deseja-se encontrar é dada por

$$\begin{aligned} y_g &= y_c + y_p \\ &= -\frac{1}{5} + c_1e^{3x} + c_2e^{-3x} - \left(\frac{8}{65}x + \frac{47}{4225}\right)\operatorname{sen} x - \\ &- \left(\frac{1}{65}x + \frac{79}{4225}\right)\cos x \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Deseja-se encontrar uma **solução particular** y_p da equação diferencial*

$$y'' + 4y = \operatorname{cossec} 2x$$

Observe inicialmente que

$$y_1 = \cos 2x$$
$$y_2 = \operatorname{sen} 2x$$

*são soluções linearmente independentes da equação homogênea associada da **edo** dada. Usando o **método da variação dos parâmetros**, segue-se que*

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, f(x) = \operatorname{cossec} 2x \\ &= \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} 2x \\ \operatorname{cossec} 2x & \cdots \end{vmatrix} \\ &= -\operatorname{cossec} 2x \operatorname{sen} 2x \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ \cdots & \operatorname{cossec} 2x \end{vmatrix} \\ &= \cos 2x \operatorname{cossec} 2x \\ &= \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{W_2}{W} \\ &= \frac{\cos 2x}{2\operatorname{sen} 2x} \end{aligned}$$

Ou seja

$$u_1 = -\frac{x}{2} + c_1$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \int u_2' dx \\ &= \int \frac{\cos 2x}{2\operatorname{sen} 2x} dx \\ &= \frac{1}{4}\ln|\operatorname{sen} 2x| + c_2 \end{aligned}$$

*com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Considerando $c_1 = c_2 = 0$, segue-se que, uma **solução particular** da equação é*

$$\begin{aligned} y_p &= y_1u_1 + y_2u_2 \\ &= -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x \ln|\operatorname{sen} 2x| \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Observe que **equação homogênea associada** é dada por*

$$y'' - 4y = 0$$

cujas soluções são

$$y_1 = e^{2x}$$

$$y_2 = e^{-2x}$$

Logo, a solução complementar da equação dada é

$$\begin{aligned} y_c &= c_1y_1 + c_2y_2 \\ &= c_1e^{2x} + c_2e^{-2x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

*Usando o **método dos coeficientes a determinar**, para encontrar uma solução particular, considere a seguinte proposta*

$$y_p = Ax + B$$

Observe que

$$y'_p = A$$

$$y''_p = 0$$

Substituindo na edo original, tem-se

$$y''_p - 4y_p = 32x \Rightarrow$$

$$0 - 4\left(Ax + B\right) = 32x \Rightarrow$$

$$Ax + B = -8x$$

Ou seja

$$A = -8$$

$$B = 0$$

e

$$y_p = -8x$$

Por fim, a solução geral do problema é dada por

$$\begin{aligned} y_g &= y_c + y_p \\ &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - 8x \end{aligned}$$

Observe que

$$y'_g = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{2x} - 8$$

e, usando as condições iniciais dadas, segue-se que

$$\left\{ \begin{array}{l} y_g(0) = 0 \\ y'_g(0) = 6 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 7 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{7}{2} \\ c_2 = -\frac{7}{2} \end{array} \right.$$

Ou seja, a solução do problema é

$$y = \frac{7}{2} e^{2x} - \frac{7}{2} e^{-2x} - 8x$$

■