

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Profº. Edson

1º Semestre

Gabarito 1ª Prova
Data: Quinta-feira, 12 de Setembro de 2024

2024
Turma E4

Exercício 1 Observe que a equação

$$(2x + 1)y' = 4x + 2y$$

pode ser reescrita da seguinte forma

$$y' - \frac{2}{2x+1}y = \frac{4x}{2x+1},$$

o que a caracteriza como sendo uma **equação diferencial linear**, em que

$$p(x) = -\frac{2}{2x+1}$$

$$g(x) = \frac{4x}{2x+1}$$

Desta forma, considere

$$\eta(x) = \int p(x)dx$$

$$= \int -\frac{2}{2x+1}dx$$

$$= -\ln|2x+1| + c_0, \quad c_0 \in \mathbb{R}$$

Tomando $c_0 = 0$, tem-se

$$\mu(x) = e^{\eta(x)}$$

$$= e^{-\ln|2x+1|}$$

$$= e^{\ln|2x+1|^{-1}}$$

$$= \frac{1}{|2x+1|}$$

$$= \pm \frac{1}{2x+1}$$

Escolhendo

$$\mu(x) = \frac{1}{2x+1}$$

segue-se que,

$$q(x) = \int \mu(x)g(x)dx$$

$$= \int \frac{1}{2x+1} \frac{4x}{2x+1} dx$$

$$= \int \frac{4x}{(2x+1)^2} dx$$

$$= \ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

e, finalmente,

$$y(x) = \frac{q(x)}{\mu(x)}$$

$$= (2x+1) \ln|2x+1| + c_1(2x+1) + 1$$

■

Exercício 2 Perceba inicialmente que a equação dada,

$$e^{-y} - (2y + xe^{-y}) y' = 0,$$

pode ser reescrita como

$$e^{-y}dx - (2y + xe^{-y}) dy = 0$$

Considerando

$$M(x, y) = e^{-y}$$

$$N(x, y) = -2y - xe^{-y},$$

tem-se,

$$M_y(x, y) = -e^{-y}$$

$$N_x(x, y) = -e^{-y}$$

Ou seja,

$$M_y(x, y) = N_x(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

o que permite afirmar que a equação em questão é **exata**

e, portanto existe uma função $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = M(x, y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = N(x, y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = e^{-y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2y - xe^{-y} \end{cases}$$

Ou seja,

$$\varphi(x, y) = xe^{-y} - y^2 + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

e a solução da equação em questão é

$$\varphi(x, y) = c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

Ou seja

$$xe^{-y} - y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Como sabe-se que

$$y(1) = 3$$

segue-se que

$$c = e^{-3} - 9$$

e a solução do problema de valor inicial dado é

$$xe^{-y} - y^2 = e^{-3} - 9$$

Exercício 3 Para a resolução da equação

$$(x^2 + 2x + y) dx = (x - 3x^2y) dy$$

Observe que esta, pode ser reescrita como

$$(x^2 + 2x + y) dx + (3x^2y - x) dy = 0$$

Assim, considere

$$M(x, y) = x^2 + 2x + y$$

$$N(x, y) = 3x^2y - x$$

e observe que

$$N_x = 6xy - 1$$

$$M_y = 1$$

e

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{M_y - N_x}{N} \\ &= \frac{-2(3xy - 1)}{x(3xy - 1)} \\ &= -\frac{2}{x} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int \varphi(x) dx \\ &= \int -\frac{2}{x} dx \\ &= -2 \ln |x| + c_0, \quad c_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tomando $c_0 = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{\ln|x|^{-2}} \\ &= \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Multiplicando a equação dada por μ , tem-se

$$\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(3y - \frac{1}{x}\right) dy = 0$$

que, agora é **exata**. Logo, existe uma função $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1 + \frac{2}{x} + \frac{y}{x^2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 3y - \frac{1}{x} \end{cases}$$

Ou seja,

$$\varphi(x, y) = \frac{3}{2}y^2 - \frac{y}{x} + x + 2 \ln x + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

e a solução da equação em questão é, portanto

$$\varphi(x, y) = c_3, \quad c_3 \in \mathbb{R}$$

Ou seja

$$\frac{3}{2}y^2 - \frac{y}{x} + x + 2 \ln x = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Exercício 4 Observe que a equação

$$y^2 + x^2 y' = xy y'$$

pode ser reescrita da seguinte maneira

$$y^2 dx + (x^2 - xy) dy = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 \left[\frac{y^2}{x^2} dx + \frac{x^2 - xy}{x^2} dy \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{y}{x} \right)^2 dx + \left(1 - \frac{y}{x} \right) dy = 0$$

Considere a seguinte mudança de variável

$$u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux$$

disto segue-se,

$$dy = x du + u dx$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$-u dx = (1 - u) x du \Rightarrow$$

$$-\frac{dx}{x} = \frac{(1 - u)}{u} du \Rightarrow$$

$$-\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{u} - 1 \right) du$$

Ou seja

$$-\ln |x| = \ln \left| \frac{y}{x} \right| - \frac{y}{x} + c_0 \Rightarrow$$

$$-\ln |x| - \ln \left| \frac{y}{x} \right| + \frac{y}{x} = c_0 \Rightarrow$$

$$\frac{y}{x} - \ln |y| = c_0 \Rightarrow$$

onde $c_0 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 Observe que a equação diferencial

$$xy' - 2x^2 \sqrt{y} = 4y$$

pode ser reescrita como

$$y' - \frac{4}{x} y = 2xy^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} \frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} y^{\frac{1}{2}} = 2x$$

que é uma **equação de Bernoulli**. Considere a seguinte mudança de variável

$$u = y^{\frac{1}{2}}$$

disto segue-se,

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} \frac{dy}{dx}$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$\frac{du}{dx} - \frac{2}{x} u = x,$$

que é uma **equação linear** com

$$p(x) = -\frac{2}{x}$$

$$g(x) = x$$

Considere portanto,

$$\eta(x) = \int p(x) dx$$

$$= -2 \int \frac{dx}{x}$$

$$= -2 \ln |x| + c_0, \quad c_0 \in \mathbb{R}$$

e, tomando $c_0 = 0$, tem-se

$$\mu(x) = e^{\eta(x)}$$

$$= e^{-2 \ln |x|}$$

$$= \frac{1}{x^2}$$

Segue-se que

$$q(x) = \int \mu(x) g(x) dx$$

$$= \int \frac{1}{x} dx$$

$$= \ln |x| + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

e

$$u(x) = \frac{q(x)}{\mu(x)}$$

$$= \frac{\ln |x| + c_1}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= x^2 (\ln |x| + c_1)$$

Ou seja,

$$y^{\frac{1}{2}} = x^2 (\ln |x| + c_1) \Rightarrow$$

$$y = x^4 (\ln |x| + c_1)^2$$

■