Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito Prova Final **2023**
Data: Quarta-feira, 20 de Dezembro de 2023 **Turma C4**

Exercício 1 *Observe que a equação diferencial*

$$xy\,dy = \left(y^2 + x\right)dx$$

pode ser reescrita como

$$y' - \frac{1}{x}y = y^{-1} \Leftrightarrow yy' - \frac{1}{x}y^2 = 1$$

*que é uma **equação de Bernoulli**.Considere a seguinte mudança de variável*

$$u = y^2$$

disto segue-se,

$$u' = 2yy'$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$u' - \frac{2}{x}u = 2,$$

*que é uma **equação linear** com*

$$p(x) = -\frac{2}{x}$$

$$g(x) = 2$$

Considere portanto,

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \int p(x)dx \\ &= -2\int \frac{dx}{x} \\ &= -2\ln|x| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{-2\ln|x|+c_0} \\ &= \frac{e^{c_0}}{x^2} \\ &= \frac{c_1}{x^2},\ c_1 = e^{c_0}\end{aligned}$$

Tomando $c_1 = 1$, segue-se que

$$\begin{aligned}q(x) &= \int \mu(x)g(x)dx \\ &= \int \frac{2dx}{x^2} \\ &= -\frac{2}{x} + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}u(x) &= \frac{q(x)}{\mu(x)} \\ &= \frac{-\frac{2}{x} + c_2}{\frac{1}{x^2}} \\ &= c_2x^2 - 2x\end{aligned}$$

Ou seja,

$$y^2 = c_2x^2 - 2x \Rightarrow$$

$$y = \sqrt{c_2x^2 - 2x}$$

■

Exercício 2 *Observe que a equação*

$$y' = 2\left(\frac{y}{x+y}\right)^2$$

pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned}2y^2dx - (x+y)^2\,dy = 0 \Rightarrow \\ x^2\left[2\frac{y^2}{x^2}dx - \frac{(x+y)^2}{x^2}dy\right] = 0 \Rightarrow \\ 2\left(\frac{y}{x}\right)^2dx - \left(1 + \frac{y}{x}\right)^2dy = 0\end{aligned}$$

Considere a seguinte mudança de variável

$$u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux$$

disto segue-se,

$$dy = x\,du + u\,dx$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$
\begin{aligned}
-u\left(1+u^2\right)\, dx &= (1+u)^2\, x\, du && \Rightarrow\\
\frac{dx}{x} &= \frac{(1+u)^2}{-u\,(1+u^2)} du && \Rightarrow\\
\frac{dx}{x} &= \left(-\frac{1}{u} - \frac{2}{1+u^2}\right) du
\end{aligned}
$$

Ou seja

$$\ln|x| = -\ln\left|\frac{y}{x}\right| - 2\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) + c_0 \Rightarrow$$

$$\ln|y| + 2\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) = c_1$$

onde $c_1 = -c_0$ *e* $c_0 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Deseja-se encontrar uma* ***solução particular*** y_p *da equação diferencial*

$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}\cos 2x$$

Observe inicialmente que

$$
\begin{aligned}
y_1 &= e^{-x}\cos 2x\\
y_2 &= e^{-x}\mathrm{sen}\, 2x
\end{aligned}
$$

são soluções linearmente independentes da equação homogênea associada da edo dada. Desta forma, para utilisar o ***método dos coeficientes a determinar****, é coerente a seguinte proposta de solução particular*

$$
\begin{aligned}
y_p &= x\left[Ae^{-x}\cos 2x + Be^{-x}\mathrm{sen}\, 2x\right]\\
&= x\,(Ay_1 + By_2)
\end{aligned}
$$

e observe que

$$
\begin{aligned}
y' &= Ay_1 + By_2 + x\left(Ay_1' + By_2'\right)\\
y'' &= 2Ay_1' + 2By_2' + x\left(Ay_1'' + By_2''\right)
\end{aligned}
$$

Substituindo-se na equação dada, tem-se

$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}\cos 2x \Leftrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
&2Ay_1' + 2By_2' + x\left(Ay_1'' + By_2''\right) +\\
&+2Ay_1 + 2By_2 + 2x\left(Ay_1' + By_2'\right) +\\
&+5x\,(Ay_1 + By_2) = 4e^{-x}\cos 2x \Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&xA\left(y_1'' + 2y_1' + 5y_1\right) +\\
&+xB\left(y_2'' + 2y_2' + 5y_2\right) +\\
&2Ay_1' + 2By_2' + 2Ay_1 + 2By_2 = 4e^{-x}\cos 2x \Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&2A\left(-e^{-x}\cos 2x - 2e^{-x}\mathrm{sen}\, 2x\right) +\\
&+2B\left(-e^{-x}\mathrm{sen}\, 2x + 2e^{-x}\cos 2x\right) +\\
&+2Ae^{-x}\cos 2x + 2Be^{-x}\mathrm{sen}\, 2x = 4e^{-x}\cos 2x \Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

$$4Be^{-x}\cos 2x - 4Ae^{-x}\mathrm{sen}\, 2x = 4e^{-x}\cos 2x$$

Ou seja,

$$\begin{cases} A = 0\\ B = 1\end{cases}$$

e, portanto uma ***solução particular*** *é*

$$y_p = xe^{-x}\mathrm{sen}\, 2x$$

□

(Outro modo:) *Sabendo que as soluções fundamentais da equação homogênea associada são*

$$y_1 = e^{-x}\cos 2x$$

$$y_2 = e^{-x}\mathrm{sen}\, 2x$$

e, usando o ***método da variação dos parâmetros****, segue-se que*

$$
\begin{aligned}
W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}\\
&= 2e^{-2x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2\\ f & y_2'\end{vmatrix},\ f(x) = 4e^{-x}\cos 2x\\
&= \begin{vmatrix} 0 & e^{-x}\mathrm{sen}\, 2x\\ 4e^{-x}\cos 2x & \cdots\end{vmatrix}\\
&= -4e^{-2x}\mathrm{sen}\, 2x\cos 2x
\end{aligned}
$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} e^{-x}\cos 2x & 0 \\ \cdots & 4e^{-x}\cos 2x \end{vmatrix}$$
$$= 4e^{-2x}\cos^2 2x$$

e,

$$u_1' = \frac{W_1}{W}$$
$$= \frac{-4e^{-2x}\operatorname{sen} 2x \cos 2x}{2e^{-2x}}$$
$$= -2\operatorname{sen} 2x \cos 2x$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W}$$
$$= \frac{4e^{-2x}\cos^2 2x}{2e^{-2x}}$$
$$= 2\cos^2 2x$$

Ou seja

$$u_1 = -\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{2} + c_1$$
$$u_2 = x + \frac{\operatorname{sen} 2x \cos 2x}{2} + c_2$$

*com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Considerando $c_1 = c_2 = 0$, segue-se que, uma **solução particular** da equação é*

$$y_p = y_1u_1 + y_2u_2$$
$$= xe^{-x}\operatorname{sen} 2x$$

$\blacksquare$

Exercício 4 *Observe que **equação homogênea associada** é dada por*

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

cujas soluções são

$$y_1 = e^{-2x}$$
$$y_2 = xe^{-2x}$$

*Usando o **método da variação de parâmetros**, tem-se que*

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x)\,e^{-2x} \end{vmatrix}$$
$$= e^{-4x}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, \; f(x) = x^{-2}e^{-2x}$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & xe^{-2x} \\ x^{-2}e^{-2x} & (1-2x)\,e^{-2x} \end{vmatrix}$$
$$= -x^{-1}e^{-4x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & x^{-2}e^{-2x} \end{vmatrix}$$
$$= x^{-2}e^{-4x}$$

e,

$$u_1' = \frac{W_1}{W}$$
$$= \frac{-x^{-1}e^{-4x}}{e^{-4x}}$$
$$= -\frac{1}{x}$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W}$$
$$= \frac{x^{-2}e^{-4x}}{e^{-4x}}$$
$$= \frac{1}{x^2}$$

Ou seja

$$u_1 = -\ln|x| + c_1$$
$$u_2 = -\frac{1}{x} + c_2$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Considerando* $c_1 = c_2 = 0$ *e usando o fato de que* $x > 0$, *segue-se que, uma* ***solução particular*** *da equação é*

$$
\begin{aligned}
y_p &= y_1 u_1 + y_2 u_2 \\
&= -e^{-2x} \ln|x| - e^{-2x} \\
&= -e^{-2x} (\ln x + 1)
\end{aligned}
$$

■

Exercício 5 *Observe que* $x = 0$ *é um* ***ponto ordinário*** *da equação*

$$\left(4 - x^2\right) y'' + 2y = 0$$

Considere portanto, a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$
\begin{aligned}
(4 - x^2)\, y'' + 2y = 0 \quad &\Rightarrow \\
(4 - x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \\
+2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
4 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \\
-x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \\
+ \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
8a_2 + 24a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} 4(n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \\
2a_0 + 2a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[-n(n-1) + 2\right] a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
8a_2 + 24a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} 4(n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \\
+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[-n(n-1) + 2\right] a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
2a_0 + 8a_2 + (2a_1 + 24a_3)\, x + \\
+ \sum_{n=2}^{\infty} \big[4(n+2)(n+1) a_{n+2} + \\
(-n^2 + n + 2) a_n\big]\, x^n = 0
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{cases}
a_2 = -\frac{1}{4} a_0 \\
a_3 = -\frac{1}{12} a_1 \\
a_{n+2} = \dfrac{n^2 - n - 2}{4(n+2)(n+1)} a_n
\end{cases}
$$

Supondo $a_0 = 1$ *e* $a_1 = 0$, *tem-se,*

$$a_2 = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 = 0$$

$$a_5 = 0$$

$$a_6 = 0$$

$$\ldots$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots \\
&= 1 - \frac{1}{4} x^2
\end{aligned}
$$

Supondo agora $a_0 = 0$ *e* $a_1 = 1$, *tem-se,*

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = -\frac{1}{12}$$

$$a_4 = 0$$

$$a_5 = -\frac{1}{240}$$

$$a_6 = 0$$

$$\ldots$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
y_2 &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots \\
&= x - \frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{240} x^5 - \cdots
\end{aligned}
$$

e a solução geral da equação é

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 6 *Usando **frações parciais**, observe inicialmente que*

$$\frac{1}{s\left(s^2+1\right)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$$

Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} -$$
$$- \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}$$
$$= 1 - \cos t$$

■

Exercício 7 *Utilizando a **Transformada de Laplace** para a resolução desta equação, observe que*

$$\mathcal{L}\left\{y'' - 8y' + 15y\right\} = \mathcal{L}\left\{6xe^{4x}\right\} \quad \Leftrightarrow$$
$$\mathcal{L}\left\{y''\right\} - 8\mathcal{L}\left\{y'\right\} + 15\mathcal{L}\left\{y\right\} = 6\mathcal{L}\left\{xe^{4x}\right\}$$

Considerando

$$Y = \mathcal{L}\left\{y\right\},$$

a equação anterior pode ser reescrita como

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) - 8\left[sY - y(0)\right] + 15Y = 6\mathcal{L}\left\{x\right\}\Big|_{s-4}$$

Ou seja,

$$\left(s^2 - 8s + 15\right)Y - 5s + 36 = \frac{6}{(s-4)^2} \quad \Rightarrow$$
$$Y = \frac{5s^3 - 76s^2 + 368s - 570}{(s-4)^2\left[(s-4)^2 - 1\right]}$$

Logo,

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y\right\}$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s^3 - 76s^2 + 368s - 570}{(s-4)^2\left[(s-4)^2 - 1\right]}\right\}$$

*Usando **frações parciais**, tem-se que*

$$\frac{5s^3 - 4s^2 - 208s + 577}{(s-4)^2\left[(s-4)^2 - 1\right]} = -\frac{6}{(s-4)^2} + \frac{5s - 30}{(s-4)^2 - 1}$$
$$= -\frac{6}{(s-4)^2} + \frac{5\left(s-4\right) - 10}{(s-4)^2 - 1}$$

Ou seja

$$y = -6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)^2}\right\} + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-4}{(s-4)^2 - 1}\right\} -$$
$$- 10\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)^2 - 1}\right\}$$
$$= \left(-6x + 5\cosh x - 10\sinh x\right)e^{4x}$$
$$= \left(-6x + \frac{-5e^x + 15e^{-x}}{2}\right)e^{4x}$$

■