Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 3ª Prova **2023**
Data: Quarta-feira, 13 de Dezembro **Turma C4**

Exercício 1 *Observe que o termo geral desta série é dado por*

$$a_n = \left(1 + e^{-n}\right)^n$$

Usando o ***teste da raíz****, tem-se que,*

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|(1+e^{-n})^n\right|} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left|1+e^{-n}\right| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ou seja, o teste é inconclusivo quanto à convergência desta série (quem fez até aqui, obteve 100% da pontuação). Observe entretanto, que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} a_n &= \lim_{n\to+\infty} \left(1+e^{-n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to+\infty} e^{n\,\ln\left(1+e^{-n}\right)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} e^{A} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to+\infty} n\,\ln\left(1+e^{-n}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+e^{-n}\right)}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{-e^{-n}}{1+e^{-n}}}{-\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}}{1+e^{-n}} n^2 \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^n+1} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{e^n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{e^n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} a_n &= \lim_{n\to+\infty} e^{A} \\ &= e^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Potanto, a série é divergente (se fosse convergente, teríamos $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$). ■

Exercício 2 *Perceba que o termo geral da série em questão é dado por*

$$a_n = \frac{\pi^n\,(x-1)^{2n}}{(2n+1)!}$$

Disto segue-se que

$$a_{n+1} = \frac{\pi^{n+1}\,(x-1)^{2n+2}}{(2n+3)!}$$

Usando o ***teste da razão****, tem-se que*

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\pi^{n+1}\,(x-1)^{2n+2}}{(2n+3)!}\,\frac{(2n+1)!}{\pi^n\,(x-1)^{2n}} \\ &= \frac{\pi\,(x-1)^2}{(2n+3)\,(2n+2)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\pi\,(x-1)^2}{(2n+3)\,(2n+2)}\right| \\ &= \pi\,(x-1)^2 \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n+3)\,(2n+2)} \\ &= 0 < 1 \end{aligned}$$

Ou seja, a série é covergente para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Observe que $x = 0$ é um ponto singular regular da* ***edo***

$$x^2y'' + 6xy' - y = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned}
x^2y'' + 6xy' - y = 0 \quad &\Rightarrow \\
x^2\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + & \\
+6x\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} - & \\
-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + & \\
+\sum_{n=0}^{\infty} 6(n+r)a_n x^{n+r} - & \\
-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \quad &\Rightarrow \\
x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n} + \right. & \\
\left. +\sum_{n=0}^{\infty} 6(n+r)a_n x^{n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n}\right] = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r-1) + 6(n+r) - 1\right] a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
\left[(n+r)(n+r-1) + 6(n+r) - 1\right] a_n = 0 &
\end{aligned}$$

Portanto,

$$a_n = 0$$

ou

$$\begin{aligned}
(n+r)(n+r-1) + 6(n+r) - 1 = 0 \Rightarrow \\
n^2 + 2nr + 5n + r^2 + 5r - 1 = 0
\end{aligned}$$

Esta equação deve valer para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Logo, quando $n = 0$, tem-se a ***equação indicial***

$$r^2 + 5r - 1 = 0$$

■

Exercício 4 *Observe que $x = 0$ é um* ***ponto ordinário*** *da equação*

$$\left(4 - x^2\right) y'' + 2y = 0$$

Considere portanto, a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned}
\left(4 - x^2\right) y'' + 2y = 0 \quad &\Rightarrow \\
\left(4 - x^2\right) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + & \\
+2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
4\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - & \\
-x^2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + & \\
+\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
8a_2 + 24a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} 4(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + & \\
2a_0 + 2a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[-n(n-1) + 2\right] a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
8a_2 + 24a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} 4(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + & \\
+\sum_{n=2}^{\infty} \left[-n(n-1) + 2\right] a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
2a_0 + 8a_2 + (2a_1 + 24a_3)\, x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[4(n+2)(n+1)a_{n+2} + \right. & \\
\left. (-n^2 + n + 2)a_n\right] x^n = 0 &
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases}
a_2 = -\frac{1}{4}a_0 \\
a_3 = -\frac{1}{12}a_1 \\
a_{n+2} = \dfrac{n^2 - n - 2}{4(n+2)(n+1)}a_n
\end{cases}$$

Supondo $a_0 = 1$ *e* $a_1 = 0$*, tem-se,*

$$a_2 = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 = 0$$

$$a_5 = 0$$

$$a_6 = 0$$

$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_1 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{4}x^2$$

Supondo agora $a_0 = 0$ *e* $a_1 = 1$*, tem-se,*

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = -\frac{1}{12}$$

$$a_4 = 0$$

$$a_5 = -\frac{1}{240}$$

$$a_6 = 0$$

$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_2 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots$$

$$= x - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{240}x^5 - \cdots$$

e a solução geral da equação é

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Observe que*

$$x^2y'' + 2xy' + 4y = 0$$

é uma ***Equação de Euler****, cuja equação auxiliar é dada por*

$$m^2 + m + 4 = 0$$

cujas solução são

$$m = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}\mathbf{i}$$

ou seja

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$
$$\beta = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Portanto, o conjunto fundamental de solução da equação é dado por

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{\alpha}\cos(\beta \ln x) \\ &= x^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\ln x\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\ln x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= x^{\alpha}\mathrm{sen}\,(\beta \ln x) \\ &= x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\ln x\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\ln x\right) \end{aligned}$$

e a solução geral da equação é

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Obs.: *A resolução desta equação usando o* ***Método de Frobenius*** *conduz a uma equação indicial cujas raízes são complexas e,este caso não foi tratado em sala de aula. Por este motivo, esta questão foi cancelada e os pontos referentes a esta questão foram concedidos a todos os alunos que participaram da prova.* ■

Exercício 6 *Usando* ***frações parciais****, observe inicialmente que*

$$\frac{1}{s\,(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s^2+1)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \\ &\quad - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} \\ &= 1 - \cos t \end{aligned}$$

■

Exercício 7 *Utilizando a* ***Transformada de Laplace*** *para a resolução desta equação, observe que*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{y''-8y'+15y\right\} = &\ \mathcal{L}\left\{6xe^{4x}\right\} \quad \Leftrightarrow\\ \mathcal{L}\left\{y''\right\}-8\mathcal{L}\left\{y'\right\}+15\mathcal{L}\left\{y\right\} = &\ 6\mathcal{L}\left\{xe^{4x}\right\}\end{aligned}$$

Considerando

$$Y=\mathcal{L}\left\{y\right\},$$

a equação anterior pode ser reescrita como

$$s^2Y-sy(0)-y'(0)-8\left[sY-y(0)\right]+15Y = 6\mathcal{L}\left\{x\right\}\big|_{s-4}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\left(s^2-8s+15\right)Y-5s+36 = &\ \frac{6}{(s-4)^2} \quad \Rightarrow\\ Y = &\ \frac{5s^3-76s^2+368s-570}{(s-4)^2\left[(s-4)^2-1\right]}\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}y &= \mathcal{L}^{-1}\left\{Y\right\}\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s^3-76s^2+368s-570}{(s-4)^2\left[(s-4)^2-1\right]}\right\}\end{aligned}$$

Usando ***frações parciais****, tem-se que*

$$\begin{aligned}\frac{5s^3-4s^2-208s+577}{(s-4)^2\left[(s-4)^2-1\right]} &= -\frac{6}{(s-4)^2}+\frac{5s-30}{(s-4)^2-1}\\ &= -\frac{6}{(s-4)^2}+\frac{5\left(s-4\right)-10}{(s-4)^2-1}\end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned}y = &-6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)^2}\right\}+5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-4}{(s-4)^2-1}\right\}-\\ &-10\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)^2-1}\right\}\\ = &\left(-6x+5\cosh x-10\sinh x\right)e^{4x}\\ = &\left(-6x+\frac{-5e^{x}+15e^{-x}}{2}\right)e^{4x}\end{aligned}$$

■