Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 2ª Prova **2023**
Data: Sábado, 25 de Novembro **Turma C4**

Exercício 1 *Observe que a equação*

$$xy'' - y' + 4x^3y = 0,$$

pode ser reescrita em sua ***forma padrão*** *da seguinte forma,*

$$y'' - \frac{1}{x}y' + 4x^2y = 0$$

onde

$$P(x) = -\frac{1}{x}$$

Deseja-se encontrar uma outra solução desta equação sabendo que

$$y_1 = \text{sen}\left(x^2\right)$$

é uma solução. Usando da ***redução de ordem****, considere*

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \int -P(x)dx \\ &= \int \frac{1}{x}dx \\ &= \ln|x| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Tomando $c_0 = 0$ e sabendo que $x > 0$, segue-se que

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{\ln x} \\ &= x\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}u(x) &= \int \frac{\mu(x)}{y_1^2}dx \\ &= \int \frac{x}{\left[\text{sen}\left(x^2\right)\right]^2}dx \\ &= -\frac{1}{2}\text{cotg}\left(x^2\right) + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Tomando $c_1 = 0$, tem-se,

$$\begin{aligned}y_2(x) &= u(x)y_1(x) \\ &= -\frac{1}{2}\text{cotg}\left(x^2\right)\text{sen}\left(x^2\right) \\ &= -\frac{1}{2}\cos\left(x^2\right)\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *A* ***equação auxiliar*** *da* ***edo*** *em questão é dada por*

$$m^3 - 8m^2 + 17m - 30 = 0,$$

Perceba que

$$m_1 = 6$$

é uma solução desta equação e

$$m^3 - 8m^2 + 17m - 30 = (m-6)\left(m^2 - 2m + 5\right)$$

Ou seja, as outras soluções desta equação são a raízes da equação

$$m^2 - 2m + 5 = 0$$

que são

$$m_2 = 1 + 2\mathbf{i}$$

$$m_3 = 1 - 2\mathbf{i}$$

Disto segue-se que

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 \\ \beta &= 2\end{aligned}$$

Assim, o ***conjunto fundamental de soluções*** *da equação diferencial em questão é*

$$\begin{aligned}y_1 &= e^{m_1x} \\ &= e^{6x} \\ y_2 &= e^{\alpha x}\text{sen}\,(\beta x) \\ &= e^{x}\text{sen}\,2x \\ y_3 &= e^{\alpha x}\cos\,(\beta x) \\ &= e^{x}\cos 2x\end{aligned}$$

Logo, a ***solução geral*** *da equação é*

$$\begin{aligned}y &= c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 \\ &= c_1e^{6x} + c_2e^{x}\text{sen}\,2x + c_3e^{x}\cos 2x\end{aligned}$$

com c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Nesta questão tem-se uma equação de* ***Cauchy-Euler*** *cuja equação auxiliar é dada por*

$$4m^2 + (8-4)m + 17 = 0,$$

cujas soluções são

$$m_1 = -\frac{1}{2} + 2\mathbf{i}$$

$$m_2 = -\frac{1}{2} - 2\mathbf{i}$$

Disto segue-se que

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\beta = 2$$

Assim, o ***conjunto fundamental de soluções*** *da equação diferencial em questão é*

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{\alpha}\cos(\beta\ln x) \\ &= x^{-\frac{1}{2}}\cos(2\ln x) \\ &= \frac{\cos(2\ln x)}{\sqrt{x}} \\ y_2 &= x^{\alpha}\operatorname{sen}(\beta\ln x) \\ &= x^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sen}(2\ln x) \\ &= \frac{\operatorname{sen}(2\ln x)}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Logo, a ***solução geral*** *da equação é*

$$\begin{aligned} y &= c_1y_1 + c_2y_2 \\ &= c_1\frac{\cos(2\ln x)}{\sqrt{x}} + c_2\frac{\operatorname{sen}(2\ln x)}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\left[c_1\cos(2\ln x) + c_2\operatorname{sen}(2\ln x)\right] \end{aligned}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Como, o* ***PVI*** *informa que* $y(1) = 2$ *e* $y'(1) = -3$, *segue-se que*

$$c_1 = 2$$

$$c_2 = -1$$

Portanto,

$$y = \frac{2\cos(2\ln x) - \operatorname{sen}(2\ln x)}{\sqrt{x}}$$

$\blacksquare$

Exercício 4 *Deseja-se encontrar uma* ***solução particular*** y_p *da equação diferencial*

$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}\cos 2x$$

Observe inicialmente que

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-x}\cos 2x \\ y_2 &= e^{-x}\operatorname{sen} 2x \end{aligned}$$

são soluções linearmente independentes da equação homogênea associada da edo dada. Desta forma, para utilisar o ***método dos coeficientes a determinar****, é coerente a seguinte proposta de solução particular*

$$\begin{aligned} y_p &= x\left[Ae^{-x}\cos 2x + Be^{-x}\operatorname{sen} 2x\right] \\ &= x\left(Ay_1 + By_2\right) \end{aligned}$$

e observe que

$$\begin{aligned} y' &= Ay_1 + By_2 + x\left(Ay_1' + By_2'\right) \\ y'' &= 2Ay_1' + 2By_2' + x\left(Ay_1'' + By_2''\right) \end{aligned}$$

Substituindo-se na equação dada, tem-se

$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}\cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} 2Ay_1' + 2By_2' + x\left(Ay_1'' + By_2''\right) &+ \\ +2Ay_1 + 2By_2 + 2x\left(Ay_1' + By_2'\right) &+ \\ +5x\left(Ay_1 + By_2\right) &= 4e^{-x}\cos 2x \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xA\left(y_1'' + 2y_1' + 5y_1\right) &+ \\ +xB\left(y_2'' + 2y_2' + 5y_2\right) &+ \\ 2Ay_1' + 2By_2' + 2Ay_1 + 2By_2 &= 4e^{-x}\cos 2x \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2A\left(-e^{-x}\cos 2x - 2e^{-x}\operatorname{sen} 2x\right) &+ \\ +2B\left(-e^{-x}\operatorname{sen} 2x + 2e^{-x}\cos 2x\right) &+ \\ +2Ae^{-x}\cos 2x + 2Be^{-x}\operatorname{sen} 2x &= 4e^{-x}\cos 2x \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$4Be^{-x}\cos 2x - 4Ae^{-x}\operatorname{sen} 2x = 4e^{-x}\cos 2x$$

Ou seja,

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

e, portanto uma ***solução particular*** *é*

$$y_p = xe^{-x}\operatorname{sen} 2x$$

$\square$

(Outro modo:) *Sabendo que as soluções fundamentais da equação homogênea associada são*

$$y_1 = e^{-x}\cos 2x$$

$$y_2 = e^{-x}\operatorname{sen} 2x$$

e, usando o ***método da variação dos parâmetros****, segue-se que*

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= 2e^{-2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, f(x) = 4e^{-x}\cos 2x \\ &= \begin{vmatrix} 0 & e^{-x}\operatorname{sen} 2x \\ 4e^{-x}\cos 2x & \cdots \end{vmatrix} \\ &= -4e^{-2x}\operatorname{sen} 2x\cos 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{-x}\cos 2x & 0 \\ \cdots & 4e^{-x}\cos 2x \end{vmatrix} \\ &= 4e^{-2x}\cos^2 2x \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} \\ &= \frac{-4e^{-2x}\operatorname{sen} 2x\cos 2x}{2e^{-2x}} \\ &= -2\operatorname{sen} 2x\cos 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{W_2}{W} \\ &= \frac{4e^{-2x}\cos^2 2x}{2e^{-2x}} \\ &= 2\cos^2 2x \end{aligned}$$

Ou seja

$$u_1 = -\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{2} + c_1$$

$$u_2 = x + \frac{\operatorname{sen} 2x\cos 2x}{2} + c_2$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Considerando* $c_1 = c_2 = 0$ *, segue-se que, uma* ***solução particular*** *da equação é*

$$\begin{aligned} y_p &= y_1u_1 + y_2u_2 \\ &= xe^{-x}\operatorname{sen} 2x \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Observe que* ***equação homogênea associada*** *é dada por*

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

cujas soluções são

$$y_1 = e^{-2x}$$

$$y_2 = xe^{-2x}$$

Usando o ***método da variação de parâmetros****, tem-se que*

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x)\,e^{-2x} \end{vmatrix} \\ &= e^{-4x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, f(x) = x^{-2}e^{-2x} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & xe^{-2x} \\ x^{-2}e^{-2x} & (1-2x)\,e^{-2x} \end{vmatrix} \\ &= -x^{-1}e^{-4x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & x^{-2}e^{-2x} \end{vmatrix} \\ &= x^{-2}e^{-4x} \end{aligned}$$

e,

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{-x^{-1}e^{-4x}}{e^{-4x}} = -\frac{1}{x}$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{x^{-2}e^{-4x}}{e^{-4x}} = \frac{1}{x^2}$$

Ou seja

$$u_1 = -\ln|x| + c_1$$

$$u_2 = -\frac{1}{x} + c_2$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Considerando* $c_1 = c_2 = 0$ *e usando o fato de que* $x > 0$, *segue-se que, uma* ***solução particular*** *da equação é*

$$y_p = y_1 u_1 + y_2 u_2 = -e^{-2x}\ln|x| - e^{-2x} = -e^{-2x}(\ln x + 1)$$

■