Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1º Semestre

Gabarito 1ª Prova **2023**
Data: Quarta-feira, 11 de Outubro de 2023 **Turma C4**

Exercício 1 *Observe que a equação*

$$xy' + y = \cos x$$

pode ser reescrita da seguinte forma

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\cos x}{x},$$

o que a caracteriza como sendo uma ***equação diferencial linear****, em que*

$$p(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = \frac{\cos x}{x}$$

Desta forma, considere

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \int p(x)dx \\ &= \int \frac{1}{x}dx \\ &= \ln|x| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Tomando $c_0 = 0$*, e observando que* $x > 0$*, tem-se*

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{\ln x} \\ &= x\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}q(x) &= \int \mu(x)g(x)dx \\ &= \int x\frac{\cos x}{x}\,dx \\ &= \operatorname{sen} x + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{q(x)}{\mu(x)} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x + c_1}{x}\end{aligned}$$

Sabendo que

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi},$$

segue-se que

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + c_1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi} \Rightarrow c_1 = 1$$

e

$$y(x) = \frac{\operatorname{sen} x + 1}{x}$$

■

Exercício 2 *Perceba inicialmente que a equação dada,*

$$3x^2\left(1 + \ln y\right) = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)\frac{dy}{dx},$$

pode ser reescrita como

$$3x^2\left(1 + \ln y\right)dx + \left(\frac{x^3}{y} - 2y\right)dy = 0$$

Considerando

$$M(x,y) = 3x^2\left(1 + \ln y\right)$$
$$N(x,y) = \frac{x^3}{y} - 2y,$$

tem-se,

$$M_y(x,y) = \frac{3x^2}{y}$$

$$N_x(x,y) = \frac{3x^2}{y}$$

Ou seja,

$$M_y(x,y) = N_x(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

o que permite afirmar que a equação em questão é ***exata*** *e, portanto existe uma função* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = M(x,y) \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = N(x,y)\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 3x^2\left(1 + \ln y\right) \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{x^3}{y} - 2y\end{cases}$$

Ou seja,

$$\varphi(x,y) = x^3(\ln y + 1) - y^2 + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$$

e a solução da equação em questão é

$$\varphi(x,y) = c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

Ou seja

$$x^3(\ln y + 1) - y^2 = c,\ c \in \mathbb{R}$$

■

Exercício 3 *Para a resolução da equação*

$$\left(3x^2 + y\right)dx + \left(x^2y - x\right)dy = 0$$

Considere

$$M(x,y) = 3x^2 + y$$

$$N(x,y) = x^2y - x$$

e observe que

$$N_x = 2xy - 1$$

$$M_y = 1$$

e

$$\varphi(x) = \frac{M_y - N_x}{N} = -\frac{2}{x}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int \varphi(x)dx \\ &= \int -\frac{2}{x}dx \\ &= -2\ln|x| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{\ln|x|^{-2} + c_0} \\ &= \frac{e^{c_0}}{x^2} \\ &= \frac{c_1}{x^2} \end{aligned}$$

onde $c_1 = e^{c_0}$ e $c_0 \in \mathbb{R}$. Tomando $c_0 = 0$ e multiplicando a equação dada por μ, tem-se

$$\left(3 + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$$

*que, agora é **exata**. Logo, existe uma função $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 3 + \dfrac{y}{x^2} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = y - \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Ou seja,

$$\varphi(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} + 3x + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

e a solução da equação em questão é, portanto

$$\varphi(x,y) = c_3,\ c_3 \in \mathbb{R}$$

Ou seja

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} + 3x = c,\ c \in \mathbb{R}$$

■

Exercício 4 *Observe que a equação diferencial*

$$xy\,dy = \left(y^2 + x\right)dx$$

pode ser reescrita como

$$y' - \frac{1}{x}y = y^{-1} \Leftrightarrow yy' - \frac{1}{x}y^2 = 1$$

*que é uma **equação de Bernoulli**.Considere a seguinte mudança de variável*

$$u = y^2$$

disto segue-se,

$$u' = 2yy'$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$u' - \frac{2}{x}u = 2,$$

*que é uma **equação linear** com*

$$p(x) = -\frac{2}{x}$$

$$g(x) = 2$$

Considere portanto,

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int p(x)dx \\ &= -2\int \frac{dx}{x} \\ &= -2\ln|x| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= e^{\eta(x)} \\
&= e^{-2\ln|x|+c_0} \\
&= \frac{e^{c_0}}{x^2} \\
&= \frac{c_1}{x^2},\ c_1 = e^{c_0}
\end{aligned}$$

Tomando $c_1 = 1$, segue-se que

$$\begin{aligned}
q(x) &= \int \mu(x)g(x)dx \\
&= \int \frac{2dx}{x^2} \\
&= -\frac{2}{x} + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{q(x)}{\mu(x)} \\
&= \frac{-\frac{2}{x} + c_2}{\frac{1}{x^2}} \\
&= c_2x^2 - 2x
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
y^2 &= c_2x^2 - 2x \Rightarrow \\
y &= \sqrt{c_2x^2 - 2x}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exercício 5 *Observe que a equação*

$$y' = 2\left(\frac{y}{x+y}\right)^2$$

pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
2y^2dx - (x+y)^2\,dy = 0 \Rightarrow \\
x^2\left[2\frac{y^2}{x^2}dx - \frac{(x+y)^2}{x^2}dy\right] = 0 \Rightarrow \\
2\left(\frac{y}{x}\right)^2 dx - \left(1+\frac{y}{x}\right)^2 dy = 0
\end{aligned}$$

Considere a seguinte mudança de variável

$$u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux$$

disto segue-se,

$$dy = x\,du + u\,dx$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$\begin{aligned}
-u\left(1+u^2\right)\,dx &= (1+u)^2\,x\,du && \Rightarrow \\
\frac{dx}{x} &= \frac{(1+u)^2}{-u\,(1+u^2)}du && \Rightarrow \\
\frac{dx}{x} &= \left(-\frac{1}{u} - \frac{2}{1+u^2}\right)du
\end{aligned}$$

Ou seja

$$\ln|x| = -\ln\left|\frac{y}{x}\right| - 2\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) + c_0 \Rightarrow$$

$$\ln|y| + 2\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) = c_1$$

onde $c_1 = -c_0$ e $c_0 \in \mathbb{R}$. $\blacksquare$