Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito Prova Final **2022**
Data: Quinta-feira, 17 de Agosto **Turma M4**

Exercício 1 *Considere a diferencial*

$$\left(ye^{-x}+1\right)dx + xe^{-x}dy = 0 \tag{1}$$

Tem-se que

$$M(x,y) = ye^{-x}+1$$
$$N(x,y) = xe^{-x}$$

e observe que

$$M_y = e^{-x}$$
$$N_x = (1-x)\,e^{-x}$$

e, além disso,

$$\frac{M_y - N_x}{N} = 1$$

O que significa dizer que a equação dada pode se tornar ***exata*** *e seu* ***fator integrante*** *é dado por*

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\int\left(\frac{M_y-N_x}{N}\right)dx}\\ &= e^{\int dx}\\ &= e^{x+c_0}\\ &= c_1e^x\end{aligned}$$

com $c_1 = e^{c_0}$ e $c_0 \in \mathbb{R}$. Escolhendo $c_1 = 1$ e multiplicando a equação (1) por μ, tem-se

$$(y+e^x)\,dx + xdy = 0$$

que é ***exata****. Para encontrar as soluções desta equação é necessário resolver o seguinte sistema*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x} = y + e^x\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} = x\end{cases}$$

Integrando em relação à y a segunda equação do sistema, obtêm-se

$$f(x,y) = xy + k(x)$$

Donde segue-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + k'(x)$$

Comparando este resultado com a primeira equação do sistema, tem-se que

$$k'(x) = e^x \Leftrightarrow k(x) = e^x + c_1$$

com $c_1 \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned}f(x,y) &= xy + k(x)\\ &= xy + e^x + c_1\end{aligned}$$

e a solução da ***edo*** *em questão é dada por*

$$f(x,y) = c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

Ou seja,

$$xy + e^x + c_1 = c_2$$
$$xy + e^x = c$$
$$y = \frac{c - e^x}{x}$$

Com $c \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 2 *Deseja-se encontrar uma* ***solução particular*** *y_p da equação diferencial*

$$y'' + 5y' + 6y = x^2e^{-x}$$

Considere

$$y_p = \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{-x}$$

e observe que

$$y' = \left[-Ax^2 + (2A-B)\,x + B - C\right]e^{-x}$$
$$y'' = \left[Ax^2 - (4A-B)\,x + 2A - 2B + C\right]e^{-x}$$

Substituindo na equação dada, tem-se

$$y'' + 5y' + 6y = x^2e^{-x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\{2Ax^2 + (6A+2B)\,x + 2A + \\ +3B + 2C\}\,e^{-x} = x^2e^{-x}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = -\dfrac{3}{2} \\ C = \dfrac{7}{4} \end{cases}$$

e, portanto a ***solução particular*** *é*

$$y_p = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right)e^{-x}$$

□

(Outro Modo:)

A ***equação auxiliar*** *da equação diferencial* ***homogênea associada*** *é dada por*

$$m^2 + 5m + 6 = 0$$

ou seja

$$m_1 = -2$$
$$m_2 = -3$$

e, o conjunto fundamental de soluções é

$$y_1 = e^{m_1 x} = e^{-2x}$$

$$y_2 = e^{m_2 x} = e^{-3x}$$

Usando o ***método da variação de parâmetros****, tem-se que*

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-3x} \\ -2e^{-2x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -e^{-5x}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, \ f = x^2e^{-x}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & e^{-3x} \\ x^2e^{-x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -x^2e^{-4x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & x^2e^{-x} \end{vmatrix} = x^2e^{-3x}$$

e,

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{-x^2e^{-4x}}{-e^{-5x}} = x^2e^x$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{x^2e^{-3x}}{-e^{-5x}} = -x^2e^{2x}$$

Ou seja

$$u_1 = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + c_0$$

$$u_2 = -\frac{1}{4}e^{2x}\left(2x^2 - 2x + 1\right) + c_1$$

com $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. Considerando $c_0 = c_1 = 0$, segue-se que, uma ***solução particular*** *da equação é*

$$y_p = y_1u_1 + y_2u_2 = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right)e^{-x}$$

■

Exercício 3 *Observe que $x = 0$ é um ponto ordinário para a* ***edo***

$$(1 + x^2)y'' + xy' + xy = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned}
(1+x^2)y'' + xy' + xy = 0 \quad &\Rightarrow \\
(1+x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + & \\
+x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + & \\
+\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + & \\
+\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0 \quad &\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2a_2 + (6a_3 + a_1 + a_0)\,x + & \\
+\sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + & \\
+\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
2a_2 + (6a_3 + a_1 + a_0)\,x + & \\
\sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + n^2 a_n + a_{n-1}\right] x^n = 0 &
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} 2a_2 = 0 \\ 6a_3 + a_1 + a_0 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} + n^2 a_n + a_{n-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ a_3 = \dfrac{-a_1 - a_0}{6} \\ a_{n+2} = \dfrac{-n^2 a_n - a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \end{cases} \Rightarrow$$

Tomando $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, tem-se

$$a_2 = 0$$
$$a_3 = -\frac{1}{6}$$
$$a_4 = 0$$
$$a_5 = \frac{3}{40}$$
$$a_6 = \frac{1}{180}$$
$$\ldots$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{1}{180}x^6 \cdots \end{aligned}$$

Tomando agora, $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, tem-se

$$a_2 = 0$$
$$a_3 = -\frac{1}{6}$$
$$a_4 = -\frac{1}{12}$$
$$a_5 = \frac{3}{40}$$
$$a_6 = \frac{1}{20}$$
$$\ldots$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{1}{20}x^6 \cdots \end{aligned}$$

*E a solução geral da **edo** é dada por*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 4 *Observe que*

$$\begin{aligned} \frac{s+1}{s^3+2s} &= \frac{s+1}{s\,(s^2+2)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+2} + \frac{1}{s^2+2} \end{aligned}$$

Logo, aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ e usando a sua linearidade, obtem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^3+2s}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+2}+\frac{1}{s^2+2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\right\}+ \\
&\quad +\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\sqrt{2}t+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t
\end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Utilizando a **Transformada de Laplace** para a resolução desta equação, observe que*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{x''+4x\} &= \mathcal{L}\{\operatorname{sen} 3t\} \quad \Leftrightarrow \\
\mathcal{L}\{x''\}+4\mathcal{L}\{x\} &= \mathcal{L}\{\operatorname{sen} 3t\}
\end{aligned}$$

Considerando

$$X=\mathcal{L}\{x\},$$

a equação anterior pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
s^2X-s\,x(0)-x'(0)+4X &= \frac{3}{s^2+9} \quad \Rightarrow \\
\left(s^2+4\right)X &= \frac{3}{s^2+9} \quad \Rightarrow \\
X &= \frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
x &= \mathcal{L}^{-1}\{X\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}\right\}
\end{aligned}$$

Usando frações paciais, tem-se que

$$\begin{aligned}
\frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)} &= \frac{3}{5}\frac{1}{(s^2+4)}-\frac{3}{5}\frac{1}{(s^2+9)} \\
&= \frac{3}{10}\frac{2}{(s^2+4)}-\frac{1}{5}\frac{3}{(s^2+9)}
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
x &= \frac{3}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}-\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} \\
&= \frac{3}{10}\operatorname{sen} 2t-\frac{1}{5}\operatorname{sen} 3t
\end{aligned}$$

■