Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito 3ª Prova **2022**
Data: Quarta-feira, 16 de Agosto **Turma M4**

Exercício 1 *Observe que o termo geral desta série é dado por*

$$a_n = \frac{2^n(x-3)^n}{n+3}$$

Assim, segue-se que

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}(x-3)^{n+1}}{n+4}$$

e

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{2^{n+1}(x-3)^{n+1}}{n+4}\frac{n+3}{2^n(x-3)^n}\right| \\
&= \left|2(x-3)\frac{n+3}{n+4}\right| \\
&= |2|\left|\frac{n+3}{n+4}\right||x-3| \\
&= 2\left(\frac{n+3}{n+4}\right)|x-3|
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{n+3}{n+4}\right)|x-3| \\
&= 2\,|x-3|\lim_{n\to+\infty}\frac{n+3}{n+4} \\
&= 2\,|x-3|
\end{aligned}$$

Usando o ***teste da razão****, a série dada será absolutamente convergente quando*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

Ou seja, quando

$$\begin{aligned}
2\,|x-3| < 1 \quad &\Rightarrow \\
|x-3| < \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \\
-\frac{1}{2} < x-3 < \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \\
3-\frac{1}{2} < x < 3+\frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \\
\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Logo, o intervalo de convergência é

$$I = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right),$$

havendo ainda a possibilidade de convergência nos extremos deste intervalo (dispensado de fazer). ■

Exercício 2 *Observe que $x = 0$ é um ponto ordinário para a* ***edo***

$$y'' - y' + xy = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned}
y'' - y' + xy = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \\
+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \\
-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \\
-a_1 - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0 \quad &\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2a_2 - a_1 + \\
+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + a_{n-1}\right]x^n = 0
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} 2a_2 - a_1 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{a_1}{2} \\ a_{n+2} = \dfrac{(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \end{cases} \Rightarrow$$

Tomando $a_0 = 1$ *e* $a_1 = 0$, *tem-se*

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = 0$$

$$a_3 = -\frac{1}{6}$$

$$a_4 = -\frac{1}{24}$$

$$a_5 = -\frac{1}{120}$$

$$\cdots$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 + \cdots \end{aligned}$$

Tomando agora, $a_0 = 0$ *e* $a_1 = 1$, *tem-se*

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{6}$$

$$a_4 = -\frac{1}{24}$$

$$a_5 = -\frac{1}{30}$$

$$\cdots$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots \end{aligned}$$

E a solução geral da ***edo*** *é dada por*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Observe que* $x = 0$ *é um* ***ponto singular regular*** *da equação*

$$xy'' - x^2 y' + (x^2 - 2)y = 0$$

Deste modo, considere a seguinte proposta de solução segundo o ***Método de Frobenius***,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned}
xy'' - x^2 y' + (x^2-2)y = 0 \quad &\Rightarrow \\
x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} - \\
-x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + (x^2-2)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} - \\
-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r+1} + \\
+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty}2a_n x^{n+r} = 0 \quad &\Rightarrow \\
x^r\Bigg[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} - \\
-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty}2a_n x^n\Bigg] = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)(n+r)a_{n+1}x^n - \\
-\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}2a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
r(r-1)a_0 x^{-1} + r(r+1)a_1 + \\
+(r+2)(r+1)a_2 x - ra_0 x - 2a_0 - 2a_1 x + \\
\sum_{n=-2}^{\infty}(n+r+1)(n+r)a_{n+1}x^n - \\
-\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^n + \\
+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty}2a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$r(r-1)a_0x^{-1} + r(r+1)a_1 - 2a_0 +$$
$$+ \left[(r+2)(r+1)a_2 - ra_0 - 2a_1\right]x +$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left\{(n+r+1)(n+r)a_{n+1} - \right.$$
$$\left. -(n+r-1)a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_n\right\}x^n = 0$$

Logo,

$$\left\{\begin{array}{r} r(r-1)a_0 = 0 \\ r(r+1)a_1 - 2a_0 = 0 \\ (r+2)(r+1)a_2 - ra_0 - 2a_1 = 0 \\ (n+r+1)(n+r)a_{n+1} - \\ -(n+r-1)a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_n = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} r = 0 \, ou \, r = 1 \\ a_1 = \dfrac{2}{r(r+1)}a_0 \\ a_2 = \dfrac{ra_0 + 2a_1}{(r+2)(r+1)} \\ a_{n+1} = \dfrac{(n+r-1)a_{n-1} - a_{n-2} + 2a_n}{(n+r+1)(n+r)} \end{array}\right.$$

Supondo $a_0 = 1$ e $r = 1$, tem-se

$$a_{n+1} = \frac{na_{n-1} - a_{n-2} + 2a_n}{(n+2)(n+1)}$$

e,

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = \frac{1}{2}$$
$$a_3 = \frac{1}{6}$$
$$a_4 = \frac{1}{24}$$
$$a_5 = \frac{1}{120}$$
$$a_6 = \frac{1}{720}$$
$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_1 = x^r\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots\right)$$
$$= x\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots\right)$$
$$= x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$
$$= x\,e^x$$

é uma solução da equação dada. ■

Exercício 4 *Usando* ***frações parciais****, observe inicialmente que*

$$\frac{s^2+s+1}{(s^2+4)(s^2-9)} = \frac{3}{13}\frac{1}{s^2+4} - \frac{1}{13}\frac{s}{s^2+4} -$$
$$-\frac{7}{78}\frac{1}{s+3} + \frac{1}{6}\frac{1}{s-3}$$

Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+s+1}{(s^2+4)(s^2-9)}\right\} = \frac{3}{13}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} -$$
$$-\frac{1}{13}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} -$$
$$-\frac{7}{78}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} +$$
$$+\frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$
$$= \frac{3}{26}\operatorname{sen}2t - \frac{1}{13}\cos 2t$$
$$-\frac{7}{78}e^{-3t} + \frac{1}{6}e^{3t}$$

■

Exercício 5 *Utilizando a* ***Transformada de Laplace*** *para a resolução desta equação, observe que*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'' - y' - 12y\} = {} & \mathcal{L}\{x\} \quad \Leftrightarrow \\ \mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 12\mathcal{L}\{y\} = {} & \mathcal{L}\{x\} \end{aligned}$$

Considerando

$$Y = \mathcal{L}\{y\},$$

a equação anterior pode ser reescrita como

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) - [sY - y(0)] - 12Y = \frac{1}{s^2} \Rightarrow$$

$$\left(s^2 - s - 12\right)Y + s - 1 = \frac{1}{s^2} \Rightarrow$$

$$Y = \frac{-s^3 + s^2 + 1}{s^2\left(s^2 - s - 12\right)}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}^{-1}\{Y\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-s^3 + s^2 + 1}{s^2\left(s^2 - s - 12\right)}\right\} \end{aligned}$$

Usando ***frações parciais****, tem-se que*

$$\frac{-s^3 + s^2 + 1}{s^2\left(s^2 - s - 12\right)} = \frac{1}{144s} - \frac{47}{112\left(s-4\right)} - \\ - \frac{37}{63\left(s+3\right)} - \frac{1}{12s^2}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{144}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{47}{112}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} - \\ &- \frac{37}{63}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - \frac{1}{12}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \\ &= \frac{1}{144} - \frac{47}{112}e^{4x} - \frac{37}{63}e^{-3x} - \frac{1}{12}x \end{aligned}$$

■