Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 2ª Prova **2022**
Data: Sexta-feira, 4 de Agosto **Turma M4**

Exercício 1 *Observe que a equação*

$$(x^2-1)y''-2xy'+2y=0$$

pode ser reescrita em sua ***forma padrão*** *da seguinte forma,*

$$y''-\frac{2x}{x^2-1}y'+\frac{2}{x^2-1}y=0$$

onde

$$P(x)=-\frac{2x}{x^2-1}$$

Deseja-se encontrar uma outra solução desta equação sabendo que

$$y_1=x^2+1$$

é uma solução. Usando o método da ***redução de ordem****, considere*

$$\begin{aligned}\eta(x)&=\int -P(x)dx\\&=\int\frac{2x}{x^2-1}dx\\&=\ln\left|x^2-1\right|+c_0\end{aligned}$$

com $c_0\in\mathbb{R}$. Disto segue-se que

$$\begin{aligned}\mu(x)&=e^{\mu(x)}\\&=e^{\ln\left|x^2-1\right|+c_0}\\&=\pm e^{c_0}\left(x^2-1\right)\\&=c_1\left(x^2-1\right)\end{aligned}$$

onde $c_1=\pm e^{c_0}$. Tomando $c_1=1$, tem-se,

$$\begin{aligned}u(x)&=\int\frac{\mu(x)}{y_1^2}dx\\&=\int\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}dx\\&=-\frac{x}{x^2+1}+c_2,\ c_2\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Tomando $c_2=0$, segue-se que,

$$\begin{aligned}y_2(x)&=y_1(x)u(x)\\&=\left(x^2+1\right)\left(-\frac{x}{x^2+1}\right)\\&=-x\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exercício 2 *A* ***equação auxiliar*** *da* ***edo*** *em questão é dada por*

$$m^3-3m^2+4m-2=0,$$

Observe que

$$m_1=1$$

é uma solução desta equação e

$$m^3-3m^2+4m-2=(m-1)\left(m^2-2m+2\right)$$

Ou seja, as outras solução desta equação são a raízes da equação

$$m^2-2m+2=0$$

que são

$$m_2=1+\mathbf{i}$$

$$m_3=1-\mathbf{i}$$

Disto segue-se que

$$\alpha=1$$
$$\beta=1$$

Assim, o ***conjunto fundamental de soluções*** *da equação diferencial em questão é*

$$\begin{aligned}y_1&=e^{m_1x}\\&=e^x\\y_2&=e^{\alpha x}\text{sen }(\beta x)\\&=e^x\text{sen }x\\y_3&=e^{\alpha x}\cos\,(\beta x)\\&=e^x\cos x\end{aligned}$$

*Logo, a **solução geral** da equação é*

$$\begin{aligned} y &= c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 \\ &= c_1e^x + c_2e^x \operatorname{sen} x + c_3e^x \cos x \\ &= e^x \left(c_1 + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 \cos x\right) \end{aligned}$$

com c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Deseja-se encontrar uma **solução particular** y_p da equação diferencial*

$$y'' + 3y' - 10y = xe^x + 2x$$

Considere

$$y_p = (Ax + B)\, e^x + Cx + D$$

e observe que

$$\begin{aligned} y' &= (Ax + A + B)\, e^x + C \\ y'' &= (Ax + 2A + B)\, e^x \end{aligned}$$

Substituindo na equação dada, tem-se

$$y'' + 3y' - 10y = xe^x + 2x \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &(Ax + 2A + B)\, e^x + \\ &+3\left[(Ax + A + B)\, e^x + C\right] - \\ &-10\left[(Ax + B)\, e^x + Cx + D\right] = xe^x + 2x \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-6Ax + 5A - 6B)\, e^x - \\ &\quad -10Cx + 3C - 10D = xe^x + 2x \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} A = -\dfrac{1}{6} \\ B = -\dfrac{5}{36} \\ C = -\dfrac{1}{5} \\ D = -\dfrac{3}{50} \end{cases}$$

*e, portanto a **solução particular** é*

$$y_p = \left(-\frac{1}{6}x - \frac{5}{36}\right) e^x - \frac{1}{5}x - \frac{3}{50}$$

■

Exercício 4 *Sendo esta um **equação de Euler**, segue-se ue sua **equação auxiliar** é dada por*

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 0$$

$$m_1 = m_2 = 1$$

*e, o **conjunto fundamental** de soluções é*

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{m_1} \\ &= x \\ y_2 &= x^{m_1} \ln x \\ &= x \ln x \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_g &= c_1y_1 + c_2y_2 \\ &= c_1x + c_2x \ln x \\ &= (c_1 + c_2 \ln x)\, x \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Observe que **equação homogênia associada** é dada por*

$$\begin{aligned} y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0 &\Leftrightarrow \\ x^2y'' - xy' + y = 0 & \end{aligned}$$

cujas soluções foram encontradas no problema anterior e são

$$\begin{aligned} y_1 &= x \\ y_2 &= x \ln x \end{aligned}$$

*e a **solução geral** é*

$$\begin{aligned} y_c &= c_1y_1 + c_2y_2 \\ &= (c_1 + c_2 \ln x)\, x \end{aligned}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

*Usando o **método da variação de parâmetros**, tem-se que*

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x & x \ln x \\ 1 & \ln x + 1 \end{vmatrix} \\ &= x \end{aligned}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, \; f = \frac{1}{x}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & x\ln x \\ \frac{1}{x} & \ln x + 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\ln x$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{1}{x} \end{vmatrix}$$

$$= 1$$

e,

$$u_1' = \frac{W_1}{W}$$

$$= \frac{-\ln x}{x}$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W}$$

$$= \frac{1}{x}$$

Ou seja

$$u_1 = -\frac{\ln^2 x}{2} + c_3$$

$$u_2 = \ln x + c_4$$

*com $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. Considerando $c_3 = c_4 = 0$ e $x > 0$, segue-se que, uma **solução particular** da equação é*

$$y_p = y_1u_1 + y_2u_2$$

$$= \frac{1}{2}x\ln^2 x$$

■