

Universidade Federal do Vale do São Francisco  
Engenharia Civil  
Cálculo Diferencial e Integral IV

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito 1ª Prova  
Data: Sexta-feira, 16 de Junho

2022  
Turma M4

**Exercício 1** Observe que a equação diferencial

$$(\operatorname{tg} x) y' = y$$

pode ser reescrita da seguinte forma

$$\operatorname{tg} x \frac{dy}{dx} = y \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\operatorname{tg} x} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

Ou seja, tem-se uma equação de **variáveis separáveis**, cuja solução é dada por

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \quad \Rightarrow$$

$$\ln |y| = \ln |\sin x| + c_0 \quad \Rightarrow$$

$$|y| = e^{\ln |\sin x| + c_0} \quad \Rightarrow$$

$$y = \pm e^{c_0} \sin x \quad \Rightarrow$$

$$y = c_1 \sin x$$

Onde  $c_1 = \pm e^{c_0}$  e  $c_0 \in \mathbb{R}$ .

Sabendo que

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

segue-se que

$$c_1 \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c_1 = \frac{\pi}{2}$$

e

$$y(x) = \frac{\pi}{2} \sin x$$

■

**Exercício 2** Reescrevendo a equação dada, chega-se a

$$y' + (\cos x) y = \cos x,$$

ou seja, tem-se uma **equação diferencial linear** com,

$$p(x) = \cos x$$

$$g(x) = \cos x$$

Desta forma, considere

$$\eta(x) = \int p(x) dx$$

$$= \int \cos x dx$$

$$= \sin x + c_0, \quad c_0 \in \mathbb{R}$$

Tomando  $c_0 = 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{\sin x} \end{aligned}$$

Além disso,

$$q(x) = \int \mu(x) g(x) dx$$

$$= \int e^{\sin x} \cos x dx$$

$$= e^{\sin x} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{q(x)}{\mu(x)} \\ &= \frac{e^{\sin x} + c_1}{e^{\sin x}} \\ &= 1 + c_1 e^{-\sin x} \end{aligned}$$

■

**Exercício 3** Para a resolução da equação

$$(3x^2 y - x^2) dx + dy = 0$$

Considere

$$M(x, y) = 3x^2 y - x^2$$

$$N(x, y) = 1$$

e observe que

$$N_x = 0$$

$$M_y = 3x^2$$

e

$$\varphi(x) = \frac{M_y - N_x}{N} = 3x^2$$

Assim,

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \int \varphi(x) dx \\ &= \int 3x^2 dx \\ &= x^3 + c_0, \quad c_0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{x^3 + c_0} \\ &= e^{x^3} e^{c_0} \\ &= c_1 e^{x^3}\end{aligned}$$

onde  $c_1 = e^{c_0}$  e  $c_0 \in \mathbb{R}$ . Tomando  $c_0 = 0$  e multiplicando a equação dada por  $\mu$ , tem-se

$$(3x^2y - x^2)e^{x^3} dx + e^{x^3} dy = 0$$

que, agora é **exata**. Logo, existe uma função  $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = (3x^2y - x^2)e^{x^3} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = e^{x^3} \end{cases}$$

Ou seja,

$$\varphi(x, y) = ye^{x^3} - \frac{1}{3}e^{x^3} + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

e a solução da equação em questão é, portanto

$$\varphi(x, y) = c_3, \quad c_3 \in \mathbb{R}$$

Ou seja

$$y = ce^{-x^3} + \frac{1}{3}, \quad c \in \mathbb{R}$$

■

**Exercício 4** Observe que a equação diferencial

$$2x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

pode ser reescrita como

$$(x^2 + y^2) dx - 2x^2 dy = 0,$$

que é uma **equação homogênea**. Colocando  $x^2$  em evidência, tem-se

$$\begin{aligned}x^2 \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{y}{x} \right)^2 \right] dx - 2dy \right\} &= 0 \Rightarrow \\ \left[ 1 + \left( \frac{y}{x} \right)^2 \right] dx - 2dy &= 0\end{aligned}$$

Considere

$$u = \frac{y}{x}$$

e observe que

$$y = ux$$

e

$$dy = x du + u dx$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$(1 + u^2) dx - 2(x du + u dx) = 0 \Rightarrow$$

$$(1 + u^2 - 2u) dx - 2x du = 0 \Rightarrow$$

$$(u - 1)^2 dx - 2x du = 0$$

Tem-se portanto, uma **equação separável**, donde segue-se que

$$\frac{dx}{x} = \frac{2du}{(u-1)^2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2du}{(u-1)^2} \Rightarrow$$

$$\ln|x| = -\frac{2}{u-1} + c_0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{u-1} = -\ln|x| + c_0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{c_0 - \ln|x|} = u - 1 \Rightarrow$$

$$u = \frac{2}{c_0 - \ln|x|} + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{y}{x} = \frac{2}{c_0 - \ln|x|} + 1 \Rightarrow$$

$$y = \frac{2x}{c_0 - \ln|x|} + x$$

onde  $c_0 \in \mathbb{R}$ . ■

**Exercício 5** Observe que a equação

$$xy^2y' = x^2 + y^3$$

$$y' = \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x}$$

pode ser reescrita da seguinte maneira

$$y' - \frac{y}{x} = xy^{-2} \Rightarrow$$

$$y^2y' - \frac{1}{x}y^3 = x$$

Ou seja, tem-se uma **equação de Bernoulli**. Considere a seguinte mudança de variável

$$u = y^3$$

disto segue-se,

$$u' = 3y^2y'$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$u' - \frac{3}{x}u^3 = 3x,$$

que é uma **equação linear** com

$$p(x) = -\frac{3}{x}$$

$$g(x) = 3x$$

Considere portanto,

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \int p(x)dx \\ &= -3 \int \frac{dx}{x} \\ &= -3 \ln |x| + c_0, \quad c_0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{-3 \ln |x| + c_0} \\ &= \frac{e^{c_0}}{|x|^3} \\ &= \frac{\pm e^{c_0}}{x^3} \\ &= \frac{c_1}{x^3}, \quad c_1 = \pm e^{c_0}\end{aligned}$$

Tomando  $c_1 = 1$ , segue-se que

$$\begin{aligned}q(x) &= \int \mu(x)g(x)dx \\ &= \int \frac{3dx}{x^2} \\ &= -\frac{3}{x} + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}u(x) &= \frac{q(x)}{\mu(x)} \\ &= \frac{-\frac{3}{x} + c_2}{\frac{1}{x^3}} \\ &= -3x^2 + c_2x^3\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}y^3 &= -3x^2 + c_2x^3 \Rightarrow \\ y &= \left(-3x^2 + c_2x^3\right)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

■