Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito Prova Final **2022**
Data: Quarta-feira, 08 de Março de 2023 **Turma C4**

Exercício 1 *A equação dada pode ser reescrita como*

$$y' - \frac{2}{2x+1}y = \frac{4x}{2x+1}$$

o que demonstra que esta é uma ***edo*** *de 1ª ordem* ***linear****, com*

$$p(x) = -\frac{2}{2x+1}$$

$$f(x) = \frac{4x}{2x+1}$$

Desta forma, considere

$$\begin{aligned}
\eta(x) &= \int p(x)dx \\
&= \int -\frac{2}{2x+1}dx \\
&= -\ln|2x+1| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= e^{\eta(x)} \\
&= e^{-\ln|2x+1|+c_0} \\
&= e^{\ln|2x+1|^{-1}+c_0} \\
&= \frac{e^{c_0}}{|2x+1|} \\
&= \frac{\pm e^{c_0}}{2x+1} \\
&= \frac{c_1}{2x+1},\ c_1 = \pm e^{c_0}
\end{aligned}$$

Tomando-se $c_1 = 1$, *tem-se,*

$$\begin{aligned}
q(x) &= \int \mu(x) f(x) dx \\
&= \int \frac{4x}{(2x+1)^2}dx \\
&= \ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{q(x)}{\mu(x)} \\
&= (2x+1)\ln|2x+1| + c_2(2x+1) + 1
\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *A* ***equação auxiliar*** *da* ***edo*** *em questão é dada por*

$$m^2 - 3m + 3 = 0,$$

cujas raízes são

$$m_2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$m_3 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ou seja

$$\alpha = \frac{3}{2}$$
$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e o ***conjunto fundamental de soluções*** *é,*

$$\begin{aligned}
y_1 &= e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \\
&= e^{\frac{3x}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}x}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2 &= e^{\alpha x}\cos\beta x \\
&= e^{\frac{3x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}
\end{aligned}$$

e a ***solução geral*** *da equação é dada por*

$$\begin{aligned}
y &= c_1y_1 + c_1y_2 \\
&= c_1e^{\frac{3x}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}x}{2} + c_2e^{\frac{3x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} \\
&= e^{\frac{3x}{2}}\left(c_1\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}x}{2} + c_2\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)
\end{aligned}$$

$c_1,\ c_2, \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *A* ***equação auxiliar*** *da equação difierencial* ***homogênea associada*** *é dada por*

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 0$$

ou seja

$$m_1 = m_2 = 1$$

e, o conjunto fundamental de soluções é

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{m_1 x} \\ &= e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= x y_1 \\ &= x e^x \end{aligned}$$

Usando o ***método da variação de parâmetros****, tem-se que*

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & (1+x)\, e^x \end{vmatrix} \\ &= e^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, \; f(x) = \frac{e^x}{x^2} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & x e^x \\ \frac{e^x}{x^2} & (1+x)\, e^x \end{vmatrix} \\ &= -\frac{e^{2x}}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x^2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{e^{2x}}{x^2} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} \\ &= \frac{-\frac{e^{2x}}{x}}{e^{2x}} \\ &= -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{W_2}{W} \\ &= \frac{\frac{e^{2x}}{x^2}}{e^{2x}} \\ &= \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} u_1 &= -\ln|x| + c_0 \\ u_2 &= -\frac{1}{x} + c_1 \end{aligned}$$

com $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$*. Considerando* $c_0 = c_1 = 0$ *e* $x > 0$*, segue-se que, uma* ***solução particular*** *da equação é*

$$\begin{aligned} y_p &= y_1 u_1 + y_2 u_2 \\ &= -e^x \ln x + x e^x \left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= -e^x (\ln x + 1) \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exercício 4 *Observe que* $x = 0$ *é um ponto singular regular da equação*

$$x y'' - x^2 y' + \left(x^2 - 2\right) y = 0$$

Deste modo, considere a seguinte proposta de solução segundo o ***método de Frobenius****,*

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

e, substituindo na equação, tem-se

$$xy'' - x^2y' + \left(x^2 - 2\right) y = 0 \Rightarrow$$

$$x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}-$$

$$-x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}+\left(x^2-2\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0\Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1}-$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r+1}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r+2}-\sum_{n=0}^{\infty}2a_n x^{n+r}=0\Rightarrow$$

$$x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1}-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+2}-\sum_{n=0}^{\infty}2a_n x^n\right]=0\Rightarrow$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)(n+r)a_{n+1}x^n-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}2a_n x^n=0\Rightarrow$$

$$r(r-1)a_0x^{-1}+r(r+1)a_1+$$

$$+(r+2)(r+1)a_2x-ra_0x+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}(n+r+1)(n+r)a_{n+1}x^n-$$

$$-\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^n-$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n-2a_0-2a_1x-\sum_{n=2}^{\infty}2a_n x^n=0\Rightarrow$$

$$r(r-1)a_0x^{-1}+r(r+1)a_1+$$

$$+(r+2)(r+1)a_2x-ra_0x-$$

$$-2a_0-2a_1x+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\{(n+r+1)(n+r)a_{n+1}-$$

$$-(n+r-1)a_{n-1}+a_{n-2}-2a_n\}\,x^n=0$$

Logo,

$$\left\{\begin{aligned} r(r-1)a_0&=0\\ r(r+1)a_1-2a_0&=0\\ (r+2)(r+1)a_2-ra_0-2a_1&=0\quad\Rightarrow\\ (n+r+1)(n+r)a_{n+1}&-\\ -(n+r-1)a_{n-1}+a_{n-2}-2a_n&=0\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &r=0\text{ ou }r=1\\ &a_1=\frac{2}{r(r+1)}a_0\\ &a_2=\frac{ra_0+2a_1}{(r+2)(r+1)}\\ &a_{n+1}=\frac{(n+r-1)a_{n-1}-a_{n-2}+2a_n}{(n+r+1)(n+r)}\end{aligned}\right.$$

Supondo $a_0 = 1$ e $r = 1$, tem-se

$$a_{n+1}=\frac{na_{n-1}-a_{n-2}+2a_n}{(n+2)(n+1)}$$

e,

$$a_1 = 1$$
$$a_2=\frac{1}{2}$$
$$a_3=\frac{1}{6}$$
$$a_4=\frac{1}{24}$$
$$a_5=\frac{1}{120}$$
$$a_6=\frac{1}{720}$$
$$\cdots$$

Ou seja

$$\begin{aligned} y_1 &= x^r\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots\right)\\ &= x\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\cdots\right)\\ &= x+x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{24}x^5+\frac{1}{120}x^6+\cdots\end{aligned}$$

é ***uma solução*** *da equação dada.* ■

Exercício 5 *Utilizando a* ***Transformada de Laplace*** *para a resolução desta equação, observe que*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{x''+4x\right\}&=\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen}3t\right\}\quad\Leftrightarrow\\ \mathcal{L}\left\{y''\right\}+4\mathcal{L}\left\{x\right\}&=\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen}3t\right\}\end{aligned}$$

Considerando

$$X=\mathcal{L}\left\{x\right\},$$

a equação anterior pode ser reescrita como

$$s^2X - sx(0) - x'(0) + 4X = \frac{3}{s^2+9} \Rightarrow$$

$$\left(s^2+4\right)X = \frac{3}{s^2+9} \Rightarrow$$

$$X = \frac{3}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+9\right)}$$

Logo,

$$x = \mathcal{L}^{-1}\left\{X\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+9\right)}\right\}$$

*Usando **frações parciais**, tem-se que*

$$\frac{3}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+9\right)} = \frac{3}{5}\frac{1}{\left(s^2+4\right)} - \frac{3}{5}\frac{1}{\left(s^2+9\right)}$$

$$= \frac{3}{10}\frac{2}{\left(s^2+4\right)} - \frac{1}{5}\frac{3}{\left(s^2+9\right)}$$

Ou seja

$$x = \frac{3}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} - \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}$$

$$= \frac{3}{10}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{5}\operatorname{sen} 3t$$

■