Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito 3ª Prova **2022**
Data: Sábado, 4 de Março **Turma C4**

Exercício 1 *Usando a definição da Transformada de Laplace, segue-se que*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \\
&= \int_0^1 e^{-st} f(t)dt + \int_1^2 e^{-st} f(t)dt + \\
&\quad + \int_2^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \\
&= \underbrace{\int_0^1 te^{-st}dt}_{A} + \underbrace{\int_1^2 t^2 e^{-st}dt}_{B} + \underbrace{\int_2^{+\infty} 0e^{-st}dt}_{0} \\
&= A + B
\end{aligned}
$$

Resolvendo a integral A, tem-se

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 te^{-st}dt \\
&= -\frac{1}{s^2}e^{-st}(st+1)\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s}(s+1)
\end{aligned}
$$

Resolvendo a integral B, tem-se

$$
\begin{aligned}
B &= \int_1^2 t^2 e^{-st}dt \\
&= -\frac{1}{s^3}e^{-st}\left(s^2t^2 + 2st + 2\right)\Big|_1^2 \\
&= \frac{1}{s^3}\left[e^{-s}\left(s^2 + 2s + 2\right) - e^{-2s}\left(4s^2 + 4s + 2\right)\right]
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= A + B \\
&= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s}(s+1) + \\
&\quad + \frac{1}{s^3}e^{-s}\left(s^2 + 2s + 2\right) - \\
&\quad - e^{-2s}\left(4s^2 + 4s + 2\right) \\
&= \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}e^{-s}(s+2) - \\
&\quad - \frac{1}{s^3}e^{-2s}\left(4s^2 + 4s + 2\right)
\end{aligned}
$$

■

Exercício 2 *Observe que o* ***termo geral*** *desta série é dado por*

$$
a_n = \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}
$$

Disto segue-se que

$$
a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{(2n-1)!}{(-1)^n x^{2n-1}}\right| \\
&= \left|\frac{-x^2}{(2n+1)2n}\right| \\
&= \frac{1}{2n(2n+1)}|x|^2
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}|x|^2 \\
&= |x|^2 \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n(2n+1)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

*Logo, pelo **teste da razão**, a série dada será **absolutamente convergente** quando*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

Ou seja, para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Observe que $x = 0$ é um **ponto ordinário** para a **edo***

$$(x+2)y'' + xy' - y = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$(x+2)y'' + xy' - y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (x+2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} &+ \\ +x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} &+ \\ +\sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1)a_n x^{n-2} &+ \\ +\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n a_{n+1} x^n &+ \\ +\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n &+ \\ +\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4a_2 - a_0 &+ \\ +\sum_{n=1}^{\infty}\Big[(n+1)n a_{n+1} + 2(n+2)(n+1)a_{n+2} &+ \\ + (n-1)\, a_n \Big] x^n &= 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left\{ \begin{aligned} 4a_2 - a_0 &= 0 \\ (n+1)n a_{n+1} + 2(n+2)(n+1)a_{n+2} &+ \\ + (n-1)\, a_n &= 0 \end{aligned} \right. \quad \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_2 &= \frac{a_0}{4} \\ a_{n+2} &= \frac{-(n+1)n a_{n+1} - (n-1)\, a_n}{2(n+2)(n+1)} \end{aligned} \right.$$

Tomando $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{4} \\ a_3 &= -\frac{1}{24} \\ a_4 &= 0 \\ a_5 &= \frac{1}{480} \\ a_6 &= -\frac{1}{1440} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{480}x^5 - \frac{1}{1440}x^6 + \cdots \end{aligned}$$

Tomando agora, $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} a_2 &= 0 \\ a_3 &= 0 \\ a_4 &= 0 \\ a_5 &= 0 \\ a_6 &= 0 \\ &\cdots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= x \end{aligned}$$

*E a solução geral da **edo** é dada por*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 4 *Observe que $x = 0$ é um ponto singular regular da equação*

$$xy'' - x^2y' + \left(x^2 - 2\right) y = 0$$

Deste modo, considere a seguinte proposta de solução segundo o ***método de Frobenius****,*

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

e, substituindo na equação, tem-se

$$xy'' - x^2y' + \left(x^2 - 2\right) y = 0 \Rightarrow$$

$$x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} - $$
$$-x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \left(x^2-2\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} -$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r+1} +$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty}2a_n x^{n+r} = 0 \Rightarrow$$

$$x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} - \right.$$
$$\left. -\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty}2a_n x^{n}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)(n+r)a_{n+1}x^n -$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}2a_n x^n = 0 \Rightarrow$$

$$r(r-1)a_0x^{-1} + r(r+1)a_1 +$$
$$+(r+2)(r+1)a_2x - ra_0x +$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}(n+r+1)(n+r)a_{n+1}x^n -$$
$$-\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^n -$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n - 2a_0 - 2a_1x - \sum_{n=2}^{\infty}2a_nx^n = 0 \Rightarrow$$

$$r(r-1)a_0x^{-1} + r(r+1)a_1 +$$
$$+(r+2)(r+1)a_2x - ra_0x -$$
$$-2a_0 - 2a_1x +$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\{(n+r+1)(n+r)a_{n+1} -$$
$$-(n+r-1)a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_n\}\, x^n = 0$$

Logo,

$$\begin{cases} r(r-1)a_0 = 0 \\ r(r+1)a_1 - 2a_0 = 0 \\ (r+2)(r+1)a_2 - ra_0 - 2a_1 = 0 \\ (n+r+1)(n+r)a_{n+1} - \\ -(n+r-1)a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_n = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r = 0 \text{ ou } r = 1 \\ a_1 = \dfrac{2}{r(r+1)}a_0 \\ a_2 = \dfrac{ra_0 + 2a_1}{(r+2)(r+1)} \\ a_{n+1} = \dfrac{(n+r-1)a_{n-1} - a_{n-2} + 2a_n}{(n+r+1)(n+r)} \end{cases}$$

Supondo $a_0 = 1$ e $r = 1$, tem-se

$$a_{n+1} = \frac{na_{n-1} - a_{n-2} + 2a_n}{(n+2)(n+1)}$$

e,

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{6}$$

$$a_4 = \frac{1}{24}$$

$$a_5 = \frac{1}{120}$$

$$a_6 = \frac{1}{720}$$

$$\ldots$$

Ou seja

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x^r\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots\right)\\
&= x\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\cdots\right)\\
&= x+x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{24}x^5+\frac{1}{120}x^6+\cdots
\end{aligned}
$$

*é **uma solução** da equação dada.* ■

Exercício 5 *Considere como proposta de solução a seguinte função*

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

*Como y é uma **Série de Taylor** em torno de $x = 0$, segue-se que*

$$a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}$$

De acordo com o enunciado do problema sabe-se que

$$y(0) = 1$$

e

$$y' = y^2 - x \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
y'(0) &= y(0)^2 - 0\\
&= 1
\end{aligned}
$$

Assim, derivando a equação dada, em relação a x, tem-se

$$y'' = 2yy' - 1 \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
y''(0) &= 2y(0)y'(0) - 1\\
&= 1
\end{aligned}
$$

Repetindo o procedimento, tem-se

$$y''' = 2\left(y'\right)^2 + 2yy'' \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
y'''(0) &= 2y'(0)^2 - 2y(0)y''(0)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$y^{iv} = 6y'y'' + 2yy''' \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
y^{iv}(0) &= 6y'(0)y''(0) + 2y(0)y'''(0)\\
&= 6
\end{aligned}
$$

$$y^{v} = 6\left(y''\right)^2 + 8y'y''' + 2yy^{iv} \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
y^{v}(0) &= 6y''(0)^2 + 8y'(0)y'''(0) + 2y(0)y^{iv}(0)\\
&= 18\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
a_0 &= y(0)\\
&= 1\\
a_1 &= \frac{y'(0)}{1!}\\
&= 1\\
a_2 &= \frac{y''(0)}{2!}\\
&= \frac{1}{2}\\
a_3 &= \frac{y'''(0)}{3!}\\
&= 0\\
a_4 &= \frac{y^{iv}(0)}{4!}\\
&= \frac{1}{4}\\
a_5 &= \frac{y^{v}(0)}{5!}\\
&= \frac{3}{20}\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
y &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots\\
&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{20}x^5 + \cdots
\end{aligned}
$$

*(**Obs.:** Esta questão tinha por objetivo explorar a **Transformada de Laplace** como método de resolução. Porém, por conta do "y^2" que há na equação, seu uso não é possível. Apesar da solução apresentada estar dentro do conteúdo ensinado, como não apresentei tal método de resolução em sala, considero a **questão cancelada** e a **pontuação** correspondente **concedida a todos** que estiveram presentes na prova.)* ■