

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito 2ª Prova

Data: Quarta-feira, 1 de Fevereiro de 2023

2022

Turma C4

Exercício 1 Observe que a equação

$$x^2 y'' - (x^2 + 2x)y' + (x + 2)y = 0$$

pode ser reescrita em sua **forma padrão** da seguinte forma,

$$y'' - \frac{x^2 + 2x}{x^2} y' + \frac{x + 2}{x^2} y = 0$$

onde

$$\begin{aligned} P(x) &= -\frac{x^2 + 2x}{x^2} \\ &= -\frac{x + 2}{x} \end{aligned}$$

Deseja-se encontrar uma outra solução desta equação sabendo que

$$y_1 = x$$

é uma solução. Usando o método da **redução de ordem**, considere

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int -P(x) dx \\ &= \int \frac{x + 2}{x} dx = \int 1 + \frac{2}{x} dx \\ &= x + 2 \ln |x| + c_0 \end{aligned}$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$. Disto segue-se que

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{x + 2 \ln |x| + c_0} \\ &= e^x e^{\ln |x|^2} e^{c_0} \\ &= e^x x^2 e^{c_0} \\ &= c_1 x^2 e^x \end{aligned}$$

onde $c_1 = e^{c_0}$. Tomando $c_1 = 1$, tem-se,

$$\begin{aligned} u(x) &= \int \frac{\mu(x)}{y_1^2} dx \\ &= \int \frac{x^2 e^x}{x^2} dx \\ &= e^x + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tomando $c_2 = 0$, segue-se que,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) u(x) \\ &= x e^x \end{aligned}$$

■

Exercício 2 A equação auxiliar da edo em questão é dada por

$$m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = 0,$$

Observe que

$$m_1 = 1$$

é uma solução desta equação e

$$m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = (m - 1)(m^2 - 5m + 6)$$

Ou seja, as outras soluções desta equação são as raízes da equação

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

que são

$$m_2 = 2$$

$$m_3 = 3$$

Assim, o **conjunto fundamental de soluções** da equação diferencial em questão é

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{m_1 x} \\ &= e^x \\ y_2 &= e^{m_2 x} \\ &= e^{2x} \\ y_3 &= e^{m_3 x} \\ &= e^{3x} \end{aligned}$$

Logo, a **solução geral** da equação é

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \\ &= c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} \end{aligned}$$

com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

■

Exercício 3 Deseja-se encontrar uma **solução particular** y_p da equação diferencial

$$y'' - 2y' + 2y = x \cos x$$

Considere

$$y_p = A \sin x + B \cos x + Cx \sin x + Dx \cos x$$

e observe que

$$y' = (D + A) \cos x + (C - B) \sin x - Dx \sin x + Cx \cos x$$

$$y'' = (2C - B) \cos x - (2D + A) \sin x - Dx \cos x - Cx \sin x$$

Substituindo na equação dada, tem-se

$$y'' - 2y' + 2y = x \cos x \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &(-2A + B + 2C - 2D) \cos x + \\ &+ (A + 2B - 2C - 2D) \sin x + \\ &+ (-2C + D)x \cos x + (C + 2D)x \sin x = x \cos x \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} -2A + B + 2C - 2D = 0 \\ A + 2B - 2C - 2D = 0 \\ -2C + D = 1 \\ C + 2D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{14}{25} \\ B = \frac{2}{25} \\ C = -\frac{2}{5} \\ D = \frac{1}{5} \end{cases}$$

e, portanto a **solução particular** é

$$\begin{aligned} y_p &= -\frac{14}{25} \sin x + \frac{2}{25} \cos x - \frac{2}{5}x \sin x + \frac{1}{5}x \cos x \\ &= -\left(\frac{14}{25} + \frac{2}{5}x\right) \sin x + \left(\frac{2}{25} + \frac{1}{5}x\right) \cos x \end{aligned}$$

■

Exercício 4 A equação auxiliar da equação diferencial homogênea associada é dada por

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 = 0$$

ou seja

$$m_1 = m_2 = 1$$

e, o conjunto fundamental de soluções é

$$y_1 = e^{m_1 x}$$

$$= e^x$$

$$y_2 = xy_1$$

$$= xe^x$$

Usando o **método da variação de parâmetros**, tem-se que

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (1+x)e^x \end{vmatrix} \\ &= e^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, f = e^x \sqrt{x} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ e^x \sqrt{x} & (1+x)e^x \end{vmatrix} \\ &= -xe^{2x} \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^x \sqrt{x} \end{vmatrix} \\ &= e^{2x} \sqrt{x} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} \\ &= \frac{-xe^{2x} \sqrt{x}}{e^{2x}} \\ &= -x \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_2' &= \frac{W_2}{W} \\
 &= \frac{e^{2x}\sqrt{x}}{e^{2x}} \\
 &= \sqrt{x}
 \end{aligned}$$

Ou seja

$$u_1 = -\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + c_0$$

$$u_2 = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c_1$$

com $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. Considerando $c_0 = c_1 = 0$ e $x > 0$, segue-se que, uma **solução particular** da equação é

$$\begin{aligned}
 y_p &= y_1 u_1 + y_2 u_2 \\
 &= -\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}e^x + \frac{2}{3}x^2\sqrt{x}e^x \\
 &= \frac{4}{15}x^2\sqrt{x}e^x
 \end{aligned}$$

■

Exercício 5 Sendo a equação dada um Equação de Euler, segue-se que a **equação auxiliar** desta é dada por

$$m^2 + 4m + 8 = 0$$

cujas raízes são,

$$m_1 = -2 + 2i$$

$$m_2 = -2 - 2i$$

Ou seja

$$\alpha = -2$$

$$\beta = 2$$

$$y_1 = x^\alpha \cos(\beta \ln x)$$

$$= x^{-2} \cos(2 \ln x)$$

$$y_2 = x^\alpha \sin(\beta \ln x)$$

$$= x^{-2} \sin(2 \ln x)$$

e a **solução geral** é

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$= c_1 x^{-2} \cos(2 \ln x) + c_2 x^{-2} \sin(2 \ln x)$$

$$= \frac{1}{x^2} \left[c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \sin(2 \ln x) \right]$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

■