Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Profº. Edson

1º Semestre

Gabarito 1ª Prova **2022**
Data: Sexta-feira, 11 de Novembro **Turma C4**

Exercício 1 *Observe que a equação diferencial*

$$e^{-y}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=1$$

pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} 1+\frac{dy}{dx} &= e^{y} && \Rightarrow \\ \frac{dy}{dx} &= e^{y}-1 && \Rightarrow \\ \frac{dy}{e^{y}-1} &= dx \end{aligned}$$

*Ou seja, tem-se uma equação de **variáveis separáveis**, cuja solução é dada por*

$$\begin{aligned} \int\frac{dy}{e^{y}-1} &= \int dx && \Rightarrow \\ \ln\left|\frac{e^{y}-1}{e^{y}}\right| &= x+c_0 && \Rightarrow \\ \left|\frac{e^{y}-1}{e^{y}}\right| &= e^{x+c_0} && \Rightarrow \\ \frac{e^{y}-1}{e^{y}} &= \pm e^{c_0}e^{x} && \Rightarrow \\ (1-c_1e^{x})\,e^{y} &= 1 && \Rightarrow \\ e^{y} &= \frac{1}{1-c_1e^{x}} && \Rightarrow \\ y &= \ln\left(\frac{1}{1-c_1e^{x}}\right) && \Rightarrow \\ y &= \ln 1-\ln(1-c_1e^{x}) && \Rightarrow \\ y &= -\ln(1-c_1e^{x}) \end{aligned}$$

Onde $c_1=\pm e^{c_0}$ *e* $c_0\in\mathbb{R}$. ■

Exercício 2 *Deseja-se resolver o seguinte **problema de valor inicial**,*

$$\begin{cases} xy'+2y=\operatorname{sen}x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \end{cases}$$

Para isto, observe inicialmente que a equação

$$xy'+2y=\operatorname{sen}x$$

pode ser reescrita como

$$y'+\frac{2}{x}y=\frac{\operatorname{sen}x}{x}$$

*ou seja, trata-se de uma **equação linear**, onde*

$$p(x)=\frac{2}{x}$$

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}x}{x}$$

Desta forma, considere

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int p(x)dx \\ &= \int\frac{2}{x}dx \\ &= 2\ln|x|+c_0,\ c_0\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Tomando $c_0=0$*, tem-se*

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{2\ln|x|} \\ &= x^2 \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} q(x) &= \int\mu(x)f(x)dx \\ &= \int x\operatorname{sen}x\,dx \\ &= \operatorname{sen}x-x\cos x+c_1,\ c_1\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{q(x)}{\mu(x)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}x-x\cos x+c_1}{x^2} \end{aligned}$$

Como deseja-se que $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$*, segue-se que*

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+c_1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\Rightarrow$$

$$c_1=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1$$

Portanto

$$y(x) = \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 1}{x^2}$$

■

Exercício 3 *Para a resolução da equação*

$$y(x+y)dx + (xy+1)dy = 0$$

Considere

$$M(x,y) = y(x+y)$$

$$N(x,y) = xy+1$$

e observe que

$$N_x = y$$

$$M_y = x+2y$$

e

$$\varphi(y) = \frac{N_x - M_y}{M} = \frac{-1}{y}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\eta(y) &= \int \varphi(y)dy \\ &= \int \frac{-1}{y}dy \\ &= -\ln|y| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mu(y) &= e^{\eta(y)} \\ &= e^{-\ln|y|+c_0} \\ &= |y|^{-1}e^{c_0} \\ &= \frac{\pm e^{c_0}}{y} \\ &= \frac{c_1}{y}\end{aligned}$$

onde $c_1 \in \mathbb{R}_*$. *Tomando* $c_1 = 1$ *e multiplicando a equação dada por* μ, *tem-se*

$$(x+y)dx + \left(x + \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

que, agora é ***exata***. *Logo, existe uma função* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = x+y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x + \dfrac{1}{y} \end{cases}$$

Ou seja,

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + \ln|y| + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

e a solução da equação em questão é, portanto

$$f(x,y) = c_3\ c_3 \in \mathbb{R}$$

Ou seja

$$\frac{x^2}{2} + xy + \ln|y| = c,\ c \in \mathbb{R}$$

■

Exercício 4 *Observe que a equação diferencial*

$$y^2 + x^2y' = xyy'$$

pode ser reescrita como

$$y^2dx + \left(x^2 - xy\right)dy = 0,$$

que é uma ***equação homogênea***. *Colocando* x^2 *em evidênvia, tem-se*

$$x^2\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2 dx + \left(1 - \frac{y}{x}\right)dy\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 dx + \left(1 - \frac{y}{x}\right)dy = 0$$

Considere

$$u = \frac{y}{x}$$

e observe que

$$y = u\,x$$

e

$$dy = x\,du + u\,dx$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$u^2dx + (1-u)\left(x\,du + u\,dx\right) = 0 \Rightarrow$$

$$udx + (1-u)\,xdu = 0$$

Tem-se portanto, uma equação separável, donde segue-se que

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{x} &= \frac{(u-1)}{u}du && \Rightarrow \\
\int\frac{dx}{x} &= \int\frac{(u-1)}{u}du && \Rightarrow \\
\ln|x| &= u - \ln|u| + c_0 && \Rightarrow \\
\ln|xu| &= u + c_0 && \Rightarrow \\
xu &= \pm e^{c_0}e^{u} && \Rightarrow \\
y &= c_1 e^{\frac{y}{x}}
\end{aligned}$$

onde $c_1 = \pm e^{c_0}$ *e* $c_0 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Observe que a equação*

$$(x+1)(y' + y^2) = -y$$

pode ser reescrita da seguinte maneira

$$y' + \frac{1}{x+1}y = -y^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y^2}y' + \frac{1}{x+1}\frac{1}{y} = -1$$

Ou seja, tem-se uma ***equação de Bernoulli****. Considere a seguinte mudança de variável*

$$u = \frac{1}{y}$$

disto segue-se,

$$u' = -\frac{1}{y^2}y'$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$u' - \frac{1}{x+1}u = 1,$$

que é uma equação linear com

$$p(x) = -\frac{1}{x+1}$$

$$f(x) = 1$$

Considere portanto,

$$\begin{aligned}
\eta(x) &= \int p(x)dx \\
&= -\int\frac{dx}{x+1} \\
&= -\ln|x+1| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= e^{\eta(x)} \\
&= e^{-\ln|x+1|+c_0} \\
&= \frac{e^{c_0}}{|x+1|} \\
&= \frac{\pm e^{c_0}}{x+1} \\
&= \frac{c_1}{x+1},\ c_1 = \pm e^{c_0}
\end{aligned}$$

Tomando $c_1 = 1$*, segue-se que*

$$\begin{aligned}
q(x) &= \int \mu(x)f(x)dx \\
&= \int\frac{dx}{x+1} \\
&= \ln|x+1| + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{q(x)}{\mu(x)} \\
&= (x+1)\left(\ln|x+1| + c_2\right)
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{1}{y} = (x+1)\left(\ln|x+1| + c_2\right) \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{(x+1)\left(\ln|x+1| + c_2\right)}$$

■