Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2º Semestre

Gabarito 3ª Prova **2021**
Data: Quinta-feira, 8 de Setembro **Turma TX**

Exercício 1 *Observe que o termo geral desta série é dado por*

$$a_n = \frac{n^{50}}{n!}(x+7)^n$$

Disto segue-se que

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^{50}}{(n+1)!}(x+7)^{n+1}$$

e

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^{50}}{(n+1)!}(x+7)^{n+1}\frac{n!}{n^{50}(x+7)^n}\right|$$

$$= \left|\frac{(n+1)^{49}}{n^{50}}(x+7)\right|$$

$$= \frac{(n+1)^{49}}{n^{50}}|x+7|$$

Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{49}}{n^{50}}|x+7|$$

$$= |x+7|\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{49}}{n^{50}}$$

$$= 0$$

Logo, pelo ***teste da razão****, a série dada será absolutamente convergente quando*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

Ou seja, para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 2 *Observe que $x = 0$ é um ponto ordinário para a* ***edo***

$$y'' + 2(1-x)y' - 3xy = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$y'' + 2(1-x)y' - 3xy = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + $$
$$+2(1-x)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 3x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} +$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^{n+1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n +$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)a_{n+1}x^n -$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n-1}x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2a_2 + 2a_1 +$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[(n+2)(n+1)a_{n+2} +$$
$$+2(n+1)a_{n+1} - 2n a_n - 3a_{n-1}\Big]x^n = 0$$

Portanto,

$$\begin{cases} 2a_2 + 2a_1 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} + \\ +2(n+1)a_{n+1} - 2na_n - 3a_{n-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_2 = -a_1 \\ a_{n+2} = \dfrac{-2(n+1)a_{n+1} + 2na_n + 3a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \end{cases}$$

Tomando $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} a_2 &= \ 0 \\ a_3 &= \ \frac{1}{2} \\ a_4 &= -\frac{1}{4} \\ a_5 &= \ \frac{1}{4} \\ a_6 &= -\frac{1}{10} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{10}x^6 + \cdots \end{aligned}$$

Tomando agora, $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} a_2 &= -1 \\ a_3 &= \ 1 \\ a_4 &= -\frac{7}{12} \\ a_5 &= \ \frac{23}{60} \\ a_6 &= -\frac{11}{60} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= x - x^2 + x^3 - \frac{7}{12}x^4 + \frac{23}{60}x^5 - \frac{11}{60}x^6 + \cdots \end{aligned}$$

*E a solução geral da **edo** é dada por*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Observe que $x = 0$ é um ponto singular regular da equação*

$$2x^2 y'' + xy' - (3x+1)\, y = 0$$

*Deste modo, considere a seguinte proposta de solução segundo o **método de Frobenius***

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

e, substituindo na equação, tem-se

$$\begin{aligned} 2x^2 y'' + xy' - (3x+1)\, y = 0 \quad &\Rightarrow \\ 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} + \\ + x\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} - (3x+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \quad &\Rightarrow \\ \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \quad &\Rightarrow \\ x^r \left[\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) a_n x^n + \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] = 0 \quad &\Rightarrow \\ \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) a_n x^n + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\ 2r(r-1)a_0 + ra_0 - a_0 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r) a_n x^n + \\ - \sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\ [2r(r-1) + r - 1]\, a_0 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \{ [(n+r)(2n+2r-1) - 1]\, a_n - 3a_{n-1} \} x^n = 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$\left\{ \begin{aligned} (2r+1)(r-1)a_0 &= 0 \\ [(n+r)(2n+2r-1) - 1]\, a_n - 3a_{n-1} &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} r = 1 \text{ ou } r = -\tfrac{1}{2} \\ a_n = \frac{3a_{n-1}}{(n+r)(2n+2r-1) - 1} \end{aligned} \right.$$

Supondo $a_0 = 1$ e $r = 1$, tem-se

$$a_n = \frac{3a_{n-1}}{(n+1)(2n+1)-1} = \frac{3a_{n-1}}{n(2n+3)}$$

e,

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = \frac{3}{5}$$
$$a_2 = \frac{9}{70}$$
$$a_3 = \frac{1}{70}$$
$$a_4 = \frac{3}{3080}$$
$$a_5 = \frac{9}{200.200}$$
$$\cdots$$

Ou seja

$$y_1 = x^r\left(a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + \cdots\right) = x\left(1 + \frac{3x}{5} + \frac{9x^2}{70} + \frac{x^3}{70} + \frac{3x^4}{3080} + \cdots\right) = x + \frac{3x^2}{5} + \frac{9x^3}{70} + \frac{x^4}{70} + \frac{3x^5}{3080} + \cdots$$

*é **uma solução** da equação dada.* ■

Exercício 4 *Usando **frações parciais**, observe inicialmente que*

$$\frac{s^3-1}{(s+2)^2(s^2-9)} = \frac{9}{5}\frac{1}{(s+2)^2} - \frac{96}{25}\frac{1}{s+2} + \frac{13}{75}\frac{1}{s-3} + \frac{14}{3}\frac{1}{s+3}$$

Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3-1}{(s+2)^2(s^2-9)}\right\} = \frac{9}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} - \frac{96}{25}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{13}{75}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + \frac{14}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$$

$$= \frac{9}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} - \frac{96}{25}e^{-2t} + \frac{13}{75}e^{3t} + \frac{14}{3}e^{-3t}$$

(***Obs.:*** *Quem chegou até aqui obteve 100% da questão.)*

Ou seja,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3-1}{(s+2)^2(s^2-9)}\right\} = \tfrac{9}{5}te^{-2t} - \tfrac{96}{25}e^{-2t} + \tfrac{13}{75}e^{3t} + \tfrac{14}{3}e^{-3t}$$

■

Exercício 5 *Utilizando a **Transformada de Laplace** para a resolução desta equação, observe que*

$$\mathcal{L}\{y'' - y' - 12y\} = \mathcal{L}\{x\} \Leftrightarrow$$
$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 12\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{x\}$$

Considerando

$$Y = \mathcal{L}\{y\},$$

a equação anterior pode ser reescrita como

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) - [sY - y(0)] - 12Y = \frac{1}{s^2} \Rightarrow$$
$$\left(s^2 - s - 12\right)Y + s - 1 = \frac{1}{s^2} \Rightarrow$$
$$Y = \frac{-s^3 + s^2 + 1}{s^2(s^2 - s - 12)}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
y &= \mathcal{L}^{-1}\left\{Y\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-s^3+s^2+1}{s^2\left(s^2-s-12\right)}\right\}
\end{aligned}
$$

*Usando **frações parciais**, tem-se que*

$$
\begin{aligned}
\frac{-s^3+s^2+1}{s^2\left(s^2-s-12\right)} &= \frac{1}{144s}-\frac{47}{112\left(s-4\right)}- \\
&\quad -\frac{37}{63\left(s+3\right)}-\frac{1}{12s^2}
\end{aligned}
$$

Ou seja

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{144}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\frac{47}{112}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}- \\
&\quad -\frac{37}{63}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}-\frac{1}{12}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \\
&= \frac{1}{144}-\frac{47}{112}e^{4x}-\frac{37}{63}e^{-3x}-\frac{1}{12}x
\end{aligned}
$$

■