Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 2ª Prova **2021**
Data: Quinta-feira, 18 de Agosto **Turma TX**

Exercício 1 *Observe que a equação*

$$(x+1)^2y'' - 3\,(x+1)\,y' + 3y = 0$$

pode ser reescrita em sua ***forma padrão*** *da seguinte forma,*

$$y'' - \frac{3}{x+1}y' + \frac{3}{(x+1)^2}y = 0$$

onde

$$P(x) = -\frac{3}{x+1}$$

Deseja-se encontrar uma outra solução desta equação sabendo que

$$y_1 = x+1$$

é uma solução. Usando o método da ***redução de ordem****, considere*

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \int -P(x)dx \\ &= \int \frac{3}{x+1}dx \\ &= 3\ln|x+1| + c_0\end{aligned}$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$. Disto segue-se que

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\mu(x)} \\ &= e^{3\ln|x+1|+c_0} \\ &= \pm e^{c_0}\,(x+1)^3 \\ &= c_1\,(x+1)^3\end{aligned}$$

onde $c_1 = \pm e^{c_0}$. Tomando $c_1 = 1$, tem-se,

$$\begin{aligned}u(x) &= \int \frac{\mu(x)}{y_1^2}dx \\ &= \int \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2}dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Tomando $c_2 = 0$, segue-se que,

$$\begin{aligned}y_2(x) &= y_1(x)u(x) \\ &= (x+1)\left(\frac{x^2}{2} + x\right) \\ &= \frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{2} + x\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *A* ***equação auxiliar*** *da* ***edo*** *em questão é dada por*

$$m^3 + 3m^2 - 4m - 12 = 0,$$

Observe que

$$m_1 = 2$$

é uma solução desta equação e

$$m^3 + 3m^2 - 4m - 12 = (m-2)\left(m^2 + 5m + 6\right)$$

Ou seja, as outras solução desta equação são a raízes da equação

$$m^2 + 5m + 6 = 0$$

que são

$$\begin{aligned}m_2 &= -2 \\ m_3 &= -3\end{aligned}$$

Assim, o ***conjunto fundamental de soluções*** *da equação diferencial em questão é*

$$\begin{aligned}y_1 &= e^{m_1x} \\ &= e^{2x} \\ y_2 &= e^{m_2x} \\ &= e^{-2x} \\ y_3 &= e^{m_3x} \\ &= e^{-3x}\end{aligned}$$

*Logo, a **solução geral** da equação é*

$$\begin{aligned} y &= c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 \\ &= c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + c_3e^{-3x} \end{aligned}$$

com c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$. ∎

Exercício 3 *Deseja-se encontrar uma **solução particular*** y_p *da equação diferencial*

$$y'' + 2y' - 24y = -(x+2)\,e^{4x}$$

Considere

$$y_p = xe^{4x}\,(Ax+B)$$

e observe que

$$\begin{aligned} y_p' &= e^{4x}\left[4Ax^2 + (2A+4B)\,x + B\right] \\ y_p'' &= e^{4x}\left[16Ax^2 + (16A+16B)\,x + 2A + 8B\right] \end{aligned}$$

Substituindo na equação dada, tem-se

$$y_p'' + 2y_p' - 24y_p = -(x+2)\,e^{4x} \Leftrightarrow$$

$$(20Ax + 2A + 10B)\,e^{4x} = -(x+2)\,e^{4x}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} A = -\dfrac{1}{20} \\ B = -\dfrac{19}{100} \end{cases}$$

*e, portanto a **solução particular** é*

$$y_p = -xe^{4x}\left(\frac{x}{20} + \frac{19}{100}\right)$$

∎

Exercício 4 *A **equação auxiliar** da equação diferencial **homogênea associada** é dada por*

$$m^2 + 3m + 2 = 0$$

ou seja

$$m_1 = -1$$

$$m_2 = -2$$

e, o conjunto fundamental de soluções é

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{m_1x} \\ &= e^{-x} \\ y_2 &= e^{m_2x} \\ &= e^{-2x} \end{aligned}$$

*Usando o **método da variação de parâmetros**, tem-se que*

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} \\ &= -e^{-3x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, \ f = \text{sen}\,(e^x) \\ &= \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \text{sen}\,(e^x) & -2e^{-2x} \end{vmatrix} \\ &= -e^{-2x}\text{sen}\,(e^x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \text{sen}\,(e^x) \end{vmatrix} \\ &= e^{-x}\text{sen}\,(e^x) \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} \\ &= \frac{-e^{-2x}\text{sen}\,(e^x)}{-e^{-3x}} \\ &= e^x\text{sen}\,(e^x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{W_2}{W} \\ &= \frac{e^{-x}\text{sen}\,(e^x)}{-e^{-3x}} \\ &= -e^{2x}\text{sen}\,(e^x) \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} u_1 &= -\cos\,(e^x) + c_0 \\ u_2 &= e^x\cos\,(e^x) - \text{sen}\,(e^x) + c_1 \end{aligned}$$

com $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$*. Considerando* $c_0 = c_1 = 0$*, segue-se que, uma* ***solução particular*** *da equação é*

$$\begin{aligned} y_p &= y_1 u_1 + y_2 u_2 \\ &= -e^{-2x} \text{sen}\left(e^x\right) \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *A* ***equação auxiliar*** *da* ***edo homogênia associada*** *é dada por*

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$

cujas raízes são,

$$m_1 = m_2 = -1$$

Ou seja

$$y_1 = x^{-1}$$

$$y_2 = x^{-1} \ln x$$

e a ***solução complementar*** *da* ***edo*** *é*

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 x^{-1} + c_2 x^{-1} \ln x \\ &= x^{-1} \left(c_1 + c_2 \ln x\right) \end{aligned}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$*.*

Usando o ***método da variação de parâmetros*** *para encontrar uma* ***solução particular****, tem-se que a equação dada em sua forma padrão torna-se*

$$y'' + \frac{3}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x^{-1} & x^{-1} \ln x \\ -x^{-2} & (1 - \ln x)\, x^{-2} \end{vmatrix} \\ &= x^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, \ f = \frac{\ln x}{x^2} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & x^{-1} \ln x \\ \frac{\ln x}{x^2} & (1 - \ln x)\, x^{-2} \end{vmatrix} \\ &= -x^{-3} \left(\ln x\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x^{-1} & 0 \\ -x^{-2} & \frac{\ln x}{x^2} \end{vmatrix} \\ &= x^{-3} \ln x \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} \\ &= \frac{-x^{-3} \left(\ln x\right)^2}{x^{-3}} \\ &= -\left(\ln x\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{W_2}{W} \\ &= \frac{x^{-3} \ln x}{x^{-3}} \\ &= \ln x \end{aligned}$$

Ou seja

$$u_1 = -x\left(\ln^2 x - 2 \ln x + 2\right) + c_3$$

$$u_2 = x\left(\ln x - 1\right) + c_4$$

com $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$*. Considerando* $c_3 = c_4 = 0$*, segue-se que, uma* ***solução particular*** *da equação é*

$$\begin{aligned} y_p &= y_1 u_1 + y_2 u_2 \\ &= \ln x - 2 \end{aligned}$$

e a ***solução geral*** *da* ***edo*** *é então*

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1 x^{-1} + c_2 x^{-1} \ln x + \ln x - 2 \end{aligned}$$

■