

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito 1ª Prova
Data: Terça-feira, 16 de Agosto de 2022

2021
Turma TX

Exercício 1 Observe que a equação diferencial

$$y = \ln y'$$

pode ser reescrita como

$$e^y = y' \Leftrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = e^y \Leftrightarrow$$

$$\frac{dy}{e^y} = dx$$

Ou seja,

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int dx \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{e^y} = x + c_0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-1}{x + c_0} = e^y \Leftrightarrow$$

$$y = \ln \left(\frac{1}{-x - c_0} \right) \Leftrightarrow$$

$$y = -\ln(c_1 - x)$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$ e $c_1 = -c_0$.

Sabendo que $y(0) = 5$, segue-se que $c_1 = e^{-5}$ e

$$y = -\ln(e^{-5} - x)$$

■

Exercício 2 Observe que a equação diferencial

$$(x - 5)(xy' + 3y) = 2$$

pode ser reescrita como

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x(x-5)}$$

que é uma equação **linear** com

$$P(x) = \frac{3}{x}$$

$$f(x) = \frac{2}{x(x-5)}$$

Segue-se que

$$\eta(x) = \int P(x)dx$$

$$= \int \frac{3}{x}dx$$

$$= 3 \ln|x| + c_0$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$. E,

$$\mu(x) = e^{\eta(x)}$$

$$= e^{3 \ln|x| + c_0}$$

$$= \pm e^{c_0} x^3$$

$$= c_1 x^3$$

onde $c_1 = \pm e^{c_0}$. Tomando $c_1 = 1$, tem-se,

$$q(x) = \int \mu(x)f(x)dx$$

$$= \int \frac{2x^2}{x-5}dx$$

$$= 10x + x^2 + 50 \ln|x-5| + c_2$$

e

$$y(x) = \frac{q(x)}{\mu(x)}$$

$$= \frac{10x + x^2 + 50 \ln|x-5| + c_2}{x^3}$$

■

Exercício 3 Perceba que a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - e^y}{x(e^y - x)}$$

Pode ser reescrita da seguinte maneira

$$(e^y - 2xy)dx + x(e^y - x)dy = 0$$

Considere

$$M(x, y) = e^y - 2xy$$

$$N(x, y) = x(e^y - x)$$

e observe que

$$M_y = e^y - 2x$$

$$N_x = e^y - 2x$$

O que significa dizer que a equação dada é **exata** Para encontrar as soluções desta equação é necessário resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^y - 2xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x(e^y - x) \end{cases}$$

Integrando em relação à x a primeira equação do sistema, obtêm-se

$$f(x, y) = xe^y - \frac{x^2 y}{2} + k(y)$$

Donde segue-se que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y - \frac{x^2}{2} + k'(y)$$

Comparando este resultado com a segunda equação do sistema, tem-se que

$$k'(y) = -\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow k(y) = -\frac{x^2 y}{2} + c_1$$

com $c_1 \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xe^y - \frac{x^2 y}{2} + k(y) \\ &= xe^y - x^2 y + c_1 \end{aligned}$$

e a solução da **edo** em questão é dada por

$$f(x, y) = c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

Ou seja,

$$xe^y - x^2 y = c$$

Com $c \in \mathbb{R}$.

Exercício 4 Observe que a equação

$$2xydx + (y^2 - x^2)dy = 0$$

Pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} x^2 \left\{ 2\frac{y}{x}dx + \left[\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1 \right] dy \right\} &= 0 \Leftrightarrow \\ 2\frac{y}{x}dx + \left[\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1 \right] dy &= 0 \end{aligned}$$

Considere

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow \begin{cases} y = ux \\ dy = x du + u dx \end{cases}$$

Assim, a equação pode novamente ser reescrita como

$$2u dx + (u^2 - 1)(x du + u dx) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(u + u^3) dx + x(u^2 - 1) du = 0 \Leftrightarrow$$

$$(u + u^3) dx = -x(u^2 - 1) du \Leftrightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{(u^2 - 1) du}{u + u^3}$$

Ou seja,

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{(u^2 - 1) du}{u + u^3} \Leftrightarrow$$

$$\ln|x| = -\ln\left(\frac{u^2 + 1}{u}\right) + c_0$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$. Trazendo de volta a variável y , tem-se

$$\ln x = \ln\left(\frac{u^2 + 1}{u}\right) + c_0 \Leftrightarrow$$

$$\ln x = -\ln\left(\frac{x^2 + y^2}{xy}\right) + c_0 \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) = c_0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 + y^2}{y} = e^{c_0} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{y} + y = c_1$$

■

Exercício 5 Reescrevendo a equação diferencial

$$\sqrt{y}(3y' + y) = x,$$

tem-se

$$y' + \frac{1}{3}y = \frac{x}{3}y^{-\frac{1}{2}},$$

que é uma **equação de Bernoulli** e pode ainda ser vista como

$$y^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}} = \frac{x}{3}$$

Considere

$$u = y^{\frac{3}{2}}$$

e observe que

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx}$$

e, substituindo na **edo** dada, tem-se

$$\frac{2}{3} \frac{du}{dx} + \frac{1}{3}u = \frac{x}{3} \Leftrightarrow \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}u = \frac{x}{2}$$

Ou seja, a **edo** resultante é **linear**, com

$$P(x) = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{x}{2}$$

e

$$\begin{aligned}\int P(x)dx &= \int \frac{dx}{2} \\ &= \frac{x}{2} + c_0\end{aligned}$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$. O **fator integrante** desta equação será então

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\int P(x)dx} \\ &= e^{\frac{x}{2} + c_0}\end{aligned}$$

Tomando $c_0 = 0$, tem-se

$$\begin{aligned}u(x) &= \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)f(x)dx \\ &= \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}} \int \frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} dx \\ &= x - 2 + \frac{c}{e^{\frac{x}{2}}}\end{aligned}$$

com $c \in \mathbb{R}$. Trazendo a variável y de volta, tem-se

$$y^{\frac{3}{2}} = u \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{\left(x - 2 + ce^{-\frac{x}{2}}\right)^2}$$

■