Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito Prova Final — **2021**
Data: Segunda-feira, 12 de Setembro — **Turmas M4 e TX**

Exercício 1 *Considere a diferencial*

$$\left(ye^{-x}+1\right)dx + xe^{-x}dy = 0$$

Tem-se que

$$M(x,y) = ye^{-x}+1$$
$$N(x,y) = xe^{-x}$$

e observe que

$$M_y = e^{-x}$$
$$N_x = (1-x)\,e^{-x}$$

e, além disso,

$$\frac{M_y - N_x}{N} = 1$$

O que significa dizer que a equação dada pode se tornar ***exata*** *e seu* ***fator integrante*** *é dado por*

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\int\left(\frac{M_y-N_x}{N}\right)dx}\\ &= e^{\int dx}\\ &= e^{x+c_0}\\ &= c_1e^x\end{aligned}$$

*com $c_1 = e^{c_0}$ e $c_0 \in \mathbb{R}$. Escolhendo $c_1 = 1$ e multiplicando a equação (**??**) por μ, tem-se*

$$(y+e^x)\,dx + xdy = 0$$

que é ***exata***. *Para encontrar as soluções desta equação é necessário resolver o seguinte sistema*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x} = y + e^x\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} = x\end{cases}$$

Integrando em relação à y a segunda equação do sistema, obtêm-se

$$f(x,y) = xy + k(x)$$

Donde segue-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + k'(x)$$

Comparando este resultado com a primeira equação do sistema, tem-se que

$$k'(x) = e^x \Leftrightarrow k(x) = e^x + c_1$$

com $c_1 \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned}f(x,y) &= xy + k(x)\\ &= xy + e^x + c_1\end{aligned}$$

e a solução da ***edo*** *em questão é dada por*

$$f(x,y) = c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

Ou seja,

$$xy + e^x + c_1 = c_2$$
$$xy + e^x = c$$
$$y = \frac{c-e^x}{x}$$

Com $c \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 2 *Observe que a equação*

$$(x^2-1)y'' - 2y = 0$$

pode ser reescrita em sua ***forma padrão*** *da seguinte forma,*

$$y'' + 0\,y' - \frac{2}{x^2-1}y = 0$$

onde

$$P(x) = 0$$

Deseja-se encontrar uma outra solução desta equação sabendo que

$$y_1 = x^2 - 1$$

é uma solução. Usando o método da ***redução de ordem***, *considere*

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \int -P(x)dx\\ &= \int 0dx\\ &= c_0\end{aligned}$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$. Disto segue-se que

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\mu(x)} \\ &= e^{c_0} \\ &= c_1 \end{aligned}$$

onde $c_1 = e^{c_0}$. Tomando $c_1 = 1$, tem-se,

$$\begin{aligned} u(x) &= \int \frac{\mu(x)}{y_1^2} dx \\ &= \int \frac{dx}{(x^2-1)^2} \\ &= \int \left(\frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x+1)^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln|x-1| - \\ &\quad - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} + c_2 \\ &= \frac{1}{4} \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{x}{x^2-1} + c_2 \end{aligned}$$

Tomando $c_2 = 0$, segue-se que,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x)u(x) \\ &= \frac{1}{4}\left(x^2-1\right) \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - x \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Deseja-se encontrar uma* ***solução particular*** *y_p da equação diferencial*

$$y'' + 5y' + 6y = x^2 e^{-x}$$

Considere

$$y_p = \left(Ax^2 + Bx + C\right) e^{-x}$$

e observe que

$$\begin{aligned} y' &= \left[-Ax^2 + (2A-B)x + B - C\right] e^{-x} \\ y'' &= \left[Ax^2 - (4A-B)x + 2A - 2B + C\right] e^{-x} \end{aligned}$$

Substituindo na equação dada, tem-se

$$y'' + 5y' + 6y = x^2 e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$\left\{2Ax^2 + (6A+2B)x + 2A + 3B + 2C\right\} e^{-x} = x^2 e^{-x} \Leftrightarrow$$

Ou seja,

$$\begin{cases} A = & \frac{1}{2} \\ B = & -\frac{3}{2} \\ C = & \frac{7}{4} \end{cases}$$

e, portanto a ***solução particular*** *é*

$$y_p = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right) e^{-x}$$

□

(Outro Modo:)

A ***equação auxiliar*** *da equação diferencial* ***homogênea associada*** *é dada por*

$$m^2 + 5m + 6 = 0$$

ou seja

$$\begin{aligned} m_1 &= -2 \\ m_2 &= -3 \end{aligned}$$

e, o conjunto fundamental de soluções é

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{m_1 x} \\ &= e^{-2x} \\ y_2 &= e^{m_2 x} \\ &= e^{-3x} \end{aligned}$$

Usando o ***método da variação de parâmetros****, tem-se que*

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-3x} \\ -2e^{-2x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} \\ &= -e^{-5x} \end{aligned}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, \; f = x^2e^{-x}$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & e^{-3x} \\ x^2e^{-x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix}$$
$$= -x^2e^{-4x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & x^2e^{-x} \end{vmatrix}$$
$$= x^2e^{-3x}$$

e,

$$u_1' = \frac{W_1}{W}$$
$$= \frac{-x^2e^{-4x}}{-e^{-5x}}$$
$$= x^2e^x$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W}$$
$$= \frac{x^2e^{-3x}}{-e^{-5x}}$$
$$= -x^2e^{2x}$$

Ou seja

$$u_1 = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + c_0$$
$$u_2 = -\frac{1}{4}e^{2x}\left(2x^2 - 2x + 1\right) + c_1$$

com $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. Considerando $c_0 = c_1 = 0$, segue-se que, uma ***solução particular*** *da equação é*

$$y_p = y_1u_1 + y_2u_2$$
$$= \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right)e^{-x}$$

■

Exercício 4 *Observe que $x = 0$ é um ponto ordinário para a* ***edo***

$$y'' + x^2y' + 2xy = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$$
$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned} y'' + x^2y' + 2xy = 0 \quad &\Rightarrow \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + & \\ +x^2\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} + 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0 \quad &\Rightarrow \\ \sum_{n=-1}^{\infty}(n+3)(n+2)a_{n+3}x^{n+1} + & \\ \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_nx^{n+1} = 0 \quad &\Rightarrow \\ 2a_2 + 6a_3x + 2a_0x + \sum_{n=1}^{\infty}(n+3)(n+2)a_{n+3}x^{n+1} + & \\ +\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_nx^{n+1} = 0 \quad &\Rightarrow \\ 2a_2 + (6a_3 + 2a_0)\,x + & \\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+3)(n+2)a_{n+3}\right. & \\ \left.+na_n + 2a_n\right]x^{n+1} = 0 & \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} 2a_2 = 0 \\ 6a_3 + 2a_0 = 0 \\ (n+3)(n+2)a_{n+3} + (n+2)\,a_n = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ a_3 = -\dfrac{a_0}{3} \\ a_{n+3} = \dfrac{-a_n}{n+3} \end{cases}$$

Tomando $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} a_2 &= 0 \\ a_3 &= -\frac{1}{3} \\ a_4 &= 0 \\ a_5 &= 0 \\ a_6 &= \frac{1}{18} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^6 + \cdots \end{aligned}$$

Tomando agora, $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} a_2 &= 0 \\ a_3 &= 0 \\ a_4 &= -\frac{1}{4} \\ a_5 &= 0 \\ a_6 &= 0 \\ a_7 &= \frac{1}{28} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= x - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{28}x^7 - \cdots \end{aligned}$$

*E a solução geral da **edo** é dada por*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Utilizando a **Transformada de Laplace** para a resolução desta equação, observe que*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{y'' - y' - 12y\right\} &= \mathcal{L}\left\{x\right\} \quad \Leftrightarrow \\ \mathcal{L}\left\{y''\right\} - \mathcal{L}\left\{y'\right\} - 12\mathcal{L}\left\{y\right\} &= \mathcal{L}\left\{x\right\} \end{aligned}$$

Considerando

$$Y = \mathcal{L}\left\{y\right\},$$

a equação anterior pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} s^2 Y - sy(0) - y'(0) - [sY - y(0)] - 12Y &= \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \\ \left(s^2 - s - 12\right) Y + s - 1 &= \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \\ Y &= \frac{-s^3 + s^2 + 1}{s^2\left(s^2 - s - 12\right)} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}^{-1}\left\{Y\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-s^3 + s^2 + 1}{s^2\left(s^2 - s - 12\right)}\right\} \end{aligned}$$

*Usando **frações parciais**, tem-se que*

$$\begin{aligned} \frac{-s^3 + s^2 + 1}{s^2\left(s^2 - s - 12\right)} = \frac{1}{144s} - \frac{47}{112\left(s - 4\right)} - \\ - \frac{37}{63\left(s + 3\right)} - \frac{1}{12s^2} \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{144}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{47}{112}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} - \\ &- \frac{37}{63}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - \frac{1}{12}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \\ &= \frac{1}{144} - \frac{47}{112}e^{4x} - \frac{37}{63}e^{-3x} - \frac{1}{12}x \end{aligned}$$

■