Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito 3ª Prova **2021**
Data: Quinta-feira, 8 de Setembro **Turma M4**

Exercício 1 *Observe que o termo geral desta série é dado por*

$$a_n = \frac{(-1)^n}{4^n}(x+2)^{3n}$$

Disto segue-se que

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}}(x+2)^{3(n+1)}$$

e

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}}(x+2)^{3(n+1)}\frac{4^n}{(-1)^n(x+2)^{3n}}\right|$$

$$= \left|\frac{-1}{4}(x+2)^3\right|$$

$$= \frac{1}{4}|x+2|^3$$

Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}|x+2|^3$$

$$= \frac{1}{4}|x+2|^3$$

*Logo, pelo **teste da razão**, a série dada será absolutamente convergente quando*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{4}|x+2|^3 < 1$$

Ou seja,

$$-\sqrt[3]{4} - 2 < x < \sqrt[3]{4} - 2$$

■

Exercício 2 *Observe que $x = 0$ é um ponto ordinário para a **edo***

$$(1-x^2)y'' + xy' - y = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned}
(1-x^2)y'' + xy' - y = 0 \quad &\Rightarrow \\
(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \\
+x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \\
+\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \\
-\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \\
-\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n \\
-a_0 - a_1 x - \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
2a_2 - a_0 + 6a_3 x +
\end{aligned}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-1)^2 a_n\right]x^n = 0$$

Portanto,

$$\begin{cases} 2a_2 - a_0 = 0 \\ 6a_3 = 0 \quad \Rightarrow \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-1)^2 a_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{a_0}{2} \\ a_3 = 0 \\ a_{n+2} = \dfrac{(n-1)^2 a_n}{(n+2)(n+1)} \end{cases}$$

Tomando $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, tem-se

$$a_2 = \frac{1}{2}$$
$$a_3 = 0$$
$$a_4 = \frac{1}{24}$$
$$a_5 = 0$$
$$a_6 = \frac{1}{80}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{80}x^6 + \cdots \end{aligned}$$

Tomando agora, $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, tem-se

$$a_2 = 0$$
$$a_3 = 0$$
$$a_4 = 0$$
$$a_5 = 0$$
$$a_6 = 0$$
$$\cdots$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= x \end{aligned}$$

*E a solução geral da **edo** é dada por*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Observe que $x = 0$ é um ponto singular regular da equação*

$$2x^2 y'' + xy' - (2x+1)\, y = 0$$

*Deste modo, considere a seguinte proposta de solução segundo o **método de Frobenius***

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

e, substituindo na equação, tem-se

$$\begin{aligned} & 2x^2 y'' + xy' - (2x+1)\, y = 0 \quad \Rightarrow \\ & 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} + \\ & + x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} - (2x+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow \\ & \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow \\ & x^r \Bigg[\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) a_n x^n + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Bigg] = 0 \quad \Rightarrow \\ & \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) a_n x^n + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow \\ & 2r(r-1)a_0 + ra_0 - a_0 + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r) a_n x^n + \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow \\ & [2r(r-1) + r - 1]\, a_0 + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \{ [(n+r)(2n+2r-1) - 1]\, a_n - 2a_{n-1} \} x^n = 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} (2r+1)(r-1)a_0 = 0 \\ [(n+r)(2n+2r-1) - 1]\, a_n - 2a_{n-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r = 1 \text{ ou } r = -\frac{1}{2} \\ a_n = \dfrac{2a_{n-1}}{(n+r)(2n+2r-1) - 1} \end{cases}$$

Supondo $a_0 = 1$ e $r = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2a_{n-1}}{(n+1)(2n+1)-1} \\ &= \frac{2a_{n-1}}{n(2n+3)} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= \frac{2}{5} \\ a_2 &= \frac{2}{35} \\ a_3 &= \frac{4}{945} \\ a_4 &= \frac{2}{10395} \\ a_5 &= \frac{4}{675.675} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} y_1 &= x^r\left(a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + \cdots\right) \\ &= x\left(1 + \frac{2x}{5} + \frac{2x^2}{35} + \frac{4x^3}{945} + \frac{2x^4}{10395} + \cdots\right) \\ &= x + \frac{2x^2}{5} + \frac{2x^3}{35} + \frac{4x^4}{945} + \frac{2x^5}{10395} + \cdots \end{aligned}$$

*é **uma solução** da equação dada.* ■

Exercício 4 *Usando **frações parciais**, observe inicialmente que*

$$\frac{s^2+s+1}{(s^2+4)(s^2-9)} = \frac{3}{13}\frac{1}{s^2+4} - \frac{1}{13}\frac{s}{s^2+4} - \frac{7}{78}\frac{1}{s+3} + \frac{1}{6}\frac{1}{s-3}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+s+1}{(s^2+4)(s^2-9)}\right\} &= \frac{3}{13}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} - \\ &- \frac{1}{13}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \\ &- \frac{7}{78}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + \\ &+ \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} \\ &= \frac{3}{26}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{13}\cos 2t \\ &- \frac{7}{78}e^{-3t} + \frac{1}{6}e^{3t} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Utilizando a **Transformada de Laplace** para a resolução desta equação, observe que*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'' - 2y' + 2y\} &= \mathcal{L}\{-2x\} \quad \Leftrightarrow \\ \mathcal{L}\{y''\} - 2\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} &= -2\mathcal{L}\{x\} \end{aligned}$$

Considerando

$$Y = \mathcal{L}\{y\},$$

a equação anterior pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} s^2Y - sy(0) - y'(0) - 2[sY - y(0)] + 2Y &= -\frac{2}{s^2} \quad \Rightarrow \\ \left(s^2 - 2s + 2\right)Y + 5 &= -\frac{2}{s^2} \quad \Rightarrow \\ Y &= \frac{-2-5s^2}{(s^2-2s+2)s^2} \end{aligned}$$

(***Obs.:*** *Quem chegou até aqui obteve 100% da questão.)*

Logo,

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}^{-1}\{Y\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2-5s^2}{(s^2-2s+2)s^2}\right\} \\ &= e^x(\cos x - 5\sin x) - x - 1 \end{aligned}$$

■