

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito 2ª Prova
Data: Quinta-feira, 18 de Agosto

2021
Turma M4

Exercício 1 Observe que a equação

$$(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

pode ser reescrita em sua **forma padrão** da seguinte forma,

$$y'' - \frac{2x}{x^2 - 1}y' + \frac{2}{x^2 - 1}y = 0$$

onde

$$P(x) = -\frac{2x}{x^2 - 1}$$

Deseja-se encontrar uma outra solução desta equação sabendo que

$$y_1 = x^2 + 1$$

é uma solução. Usando o método da **redução de ordem**, considere

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \int -P(x)dx \\ &= \int \frac{2x}{x^2 - 1}dx \\ &= \ln|x^2 - 1| + c_0\end{aligned}$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$. Disto segue-se que

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{\ln|x^2 - 1| + c_0} \\ &= \pm e^{c_0} (x^2 - 1) \\ &= c_1 (x^2 - 1)\end{aligned}$$

onde $c_1 = \pm e^{c_0}$. Tomando $c_1 = 1$, tem-se,

$$\begin{aligned}u(x) &= \int \frac{\mu(x)}{y_1^2}dx \\ &= \int \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}dx \\ &= -\frac{x}{x^2 + 1} + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Tomando $c_2 = 0$, segue-se que,

$$\begin{aligned}y_2(x) &= y_1(x)u(x) \\ &= (x^2 + 1) \left(-\frac{x}{x^2 + 1} \right) \\ &= -x\end{aligned}$$

■

Exercício 2 A equação auxiliar da edo em questão é dada por

$$m^3 - 3m^2 + 3m - 1 = 0,$$

Observe que

$$m_1 = 1$$

é uma solução desta equação e

$$m^3 - 3m^2 + 3m - 1 = (m - 1)(m^2 - 2m + 1)$$

Ou seja, as outras solução desta equação são a raízes da equação

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

que são

$$m_2 = 1$$

$$m_3 = 1$$

Assim, o **conjunto fundamental de soluções** da equação diferencial em questão é

$$\begin{aligned}y_1 &= e^{m_1 x} \\ &= e^x \\ y_2 &= xy_1 \\ &= xe^x \\ y_3 &= xy_2 \\ &= x^2 e^x\end{aligned}$$

Logo, a **solução geral** da equação é

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \\ &= c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x \\ &= e^x (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) \end{aligned}$$

com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 Deseja-se encontrar uma **solução particular** y_p da equação diferencial

$$y'' + 4y' = x^2 - 3$$

Considere

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

e observe que

$$\begin{aligned} y' &= 3Ax^2 + 2Bx + C \\ y'' &= 6Ax + 2B \end{aligned}$$

Substituindo na equação dada, tem-se

$$y'' + 4y' = x^2 - 3 \Leftrightarrow$$

$$6Ax + 2B + 4(3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 - 3 \Leftrightarrow$$

$$12Ax^2 + (6A + 8B)x + 2B + 4C = x^2 - 3$$

Ou seja,

$$\begin{cases} A = \frac{1}{12} \\ B = -\frac{1}{16} \\ C = \frac{-23}{32} \\ D \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e, portanto a **solução particular** é

$$y_p = \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{16} - \frac{23}{32}x$$

tomando $D = 0$. ■

Exercício 4 A **equação auxiliar** da equação diferencial homogênea associada é dada por

$$m^2 + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m + 1)^2 = 0$$

ou seja

$$m_1 = m_2 = -1$$

e, o conjunto fundamental de soluções é

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{m_1 x} \\ &= e^{-x} \\ y_2 &= x y_1 \\ &= x e^{-x} \end{aligned}$$

Usando o **método da variação de parâmetros**, tem-se que

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{-x} & x e^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix} \\ &= e^{-2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, f = e^{-x} \ln x \\ &= \begin{vmatrix} 0 & x e^{-x} \\ e^{-x} \ln x & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix} \\ &= -x e^{-2x} \ln x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & e^{-x} \ln x \end{vmatrix} \\ &= e^{-2x} \ln x \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} \\ &= \frac{-x e^{-2x} \ln x}{e^{-2x}} \\ &= -x \ln x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{W_2}{W} \\ &= \frac{e^{-2x} \ln x}{e^{-2x}} \\ &= \ln x \end{aligned}$$

Ou seja

$$u_1 = \frac{1}{2}x^2 \left(\frac{1}{2} - \ln x \right) + c_0$$

$$u_2 = x (\ln x - 1) + c_1$$

com $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. Considerando $c_0 = c_1 = 0$ e $x > 0$, segue-se que, uma **solução particular** da equação é

$$\begin{aligned} y_p &= y_1 u_1 + y_2 u_2 \\ &= \frac{1}{2}e^{-x}x^2 \left(-\frac{3}{2} + \ln x \right) \end{aligned}$$

■

Exercício 5 A equação auxiliar da edo homogênea associada é dada por

$$m^2 + 3m + 2 = 0$$

cujas raízes são,

$$m_1 = -1$$

$$m_2 = -2$$

Ou seja

$$y_1 = x^{-1}$$

$$y_2 = x^{-2}$$

e a solução complementar da edo é

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2} \end{aligned}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Usando o **método da variação de parâmetros** para encontrar uma **solução particular**, tem-se que a equação dada em sua forma padrão torna-se

$$y'' + \frac{4}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = \frac{e^x}{x^2}$$

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x^{-1} & x^{-2} \\ -x^{-2} & -2x^{-3} \end{vmatrix} \\ &= -x^{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, f = \frac{e^x}{x^2} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & x^{-2} \\ \frac{e^x}{x^2} & -2x^{-3} \end{vmatrix} \\ &= -e^x x^{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x^{-1} & 0 \\ -x^{-2} & \frac{e^x}{x^2} \end{vmatrix} \\ &= e^x x^{-3} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} \\ &= \frac{-e^x x^{-4}}{-x^{-4}} \\ &= e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{W_2}{W} \\ &= \frac{e^x x^{-3}}{-x^{-4}} \\ &= -e^x x \end{aligned}$$

Ou seja

$$u_1 = e^x + c_3$$

$$u_2 = e^x (1 - x) + c_4$$

com $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. Considerando $c_3 = c_4 = 0$, segue-se que, uma **solução particular** da equação é

$$\begin{aligned} y_p &= y_1 u_1 + y_2 u_2 \\ &= e^x x^{-2} \end{aligned}$$

e a solução geral da edo é então

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2} + e^x x^{-2} \end{aligned}$$

■