Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof°. Edson

2° Semestre

Gabarito 1ª Prova **2021**
Data: Segunda-feira, 15 de Agosto **Turma M4**

Exercício 1 *Observe que a equação diferencial*

$$y' - y\cos x = xe^{x^2+\operatorname{sen} x}$$

*é **linear**, sendo*

$$p(x) = -\cos x$$

$$f(x) = xe^{x^2+\operatorname{sen} x}$$

Desta forma, considere

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \int p(x)\\ &= -\int \cos x\,dx\\ &= -\operatorname{sen} x + c_0\end{aligned}$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$. Tomando $c_0 = 0$, segue-se que

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\eta(x)}\\ &= e^{-\operatorname{sen} x}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}q(x) &= \int \mu(x)f(x)dx\\ &= \int e^{-\operatorname{sen} x}xe^{x^2+\operatorname{sen} x}dx\\ &= \int xe^{x^2}dx\\ &= \frac{1}{2}e^{x^2} + c_1\end{aligned}$$

com $c_1 \in \mathbb{R}$. E, finalmente,

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{q(x)}{\mu(x)}\\ &= \frac{\frac{1}{2}e^{x^2} + c_1}{e^{-\operatorname{sen} x}}\\ &= e^{\operatorname{sen} x}\left(\frac{1}{2}e^{x^2} + c_1\right)\end{aligned}$$

Sabendo que $y(0) = 2$, segue-se que

$$c_1 = \frac{3}{2}$$

ea solução do PVIé,portanto,

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{\operatorname{sen} x}\left(e^{x^2} + 3\right)$$

■

Exercício 2 *Observe que a equação diferencial*

$$y^2 + 4 - x^2yy' = 0$$

usando separação de variáveis, pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}x^2yy' &= y^2 + 4 \quad \Leftrightarrow\\ y\frac{dy}{dx} &= \frac{y^2+4}{x^2} \quad \Leftrightarrow\\ \frac{ydy}{y^2+4} &= \frac{dx}{x^2}\end{aligned}$$

Integrando os dois lados desta equação, obtêm-se

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\ln\left(y^2+4\right) &= -\tfrac{1}{x} + c_0 \quad \Leftrightarrow\\ \ln\left(y^2+4\right) &= -\tfrac{2}{x} + 2c_0 \quad \Leftrightarrow\\ y^2 + 4 &= e^{-\frac{2}{x}}e^{2c_0} \quad \Leftrightarrow\\ y &= \pm\sqrt{c_1e^{-\frac{2}{x}} - 4}\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Perceba que a equação diferencial*

$$e^{x^3} + \operatorname{sen} y + \left(\frac{x}{3}\cos y\right)y' = 0$$

Pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\left(e^{x^3} + \operatorname{sen} y\right)dx + \left(\frac{x}{3}\cos y\right)dy = 0 \tag{1}$$

Considere

$$M(x,y) = e^{x^3} + \operatorname{sen} y$$

$$N(x,y) = \frac{x}{3}\cos y$$

e observe que

$$M_y = \cos y$$

$$N_x = \frac{1}{3}\cos y$$

e, além disso,

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2}{x}$$

O que significa dizer que a equação dada pode se tornar ***exata*** *e seu* ***fator integrante*** *é dado por*

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\int \frac{2}{x}dx} \\ &= e^{2\ln|x| + c_0} \\ &= e^{\ln|x|^2}e^{c_0} \\ &= e^{c_0}x^2 \\ &= c_1 x^2\end{aligned}$$

com $c_1 = e^{c_0}$ *e* $c_0 \in \mathbb{R}$. *Escolhendo* $c_1 = 1$ *e multiplicando a equação (1) por* μ, *tem-se*

$$x^2\left(e^{x^3} + \operatorname{sen} y\right)dx + \frac{x^3\cos y}{3}dy = 0$$

que é ***exata***. *Para encontrar as soluções desta equação é necessário resolver o seguinte sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = x^2\left(e^{x^3} + \operatorname{sen} y\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^3\cos y}{3} \end{cases}$$

Integrando em relação à y *a segunda equação do sistema, obtêm-se*

$$f(x,y) = \frac{x^3\operatorname{sen} y}{3} + k(x)$$

Donde segue-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2\operatorname{sen} y + k'(x)$$

Comparando este resultado com a primeira equação do sistema, tem-se que

$$k'(x) = x^2e^{x^3} \Leftrightarrow k(x) = \frac{1}{3}e^{x^3} + c_1$$

com $c_1 \in \mathbb{R}$. *Assim,*

$$\begin{aligned}f(x,y) &= \frac{x^3\operatorname{sen} y}{3} + k(x) \\ &= \frac{x^3\operatorname{sen} y + e^{x^3}}{3} + c_1\end{aligned}$$

e a solução da ***edo*** *em questão é dada por*

$$f(x,y) = c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

Ou seja,

$$\frac{x^3\operatorname{sen} y + e^{x^3}}{3} + c_1 = c_2$$

$$x^3\operatorname{sen} y + e^{x^3} = c$$

Com $c \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 4 *Observe que a equação*

$$xy + y^2 + x^2 - x^2y' = 0$$

Pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\left(xy + y^2 + x^2\right)dx - x^2dy = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ x^2\left\{\left[\tfrac{y}{x} + \left(\tfrac{y}{x}\right)^2 + 1\right]dx - dy\right\} = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ \left[\tfrac{y}{x} + \left(\tfrac{y}{x}\right)^2 + 1\right]dx - dy = 0 \quad &\end{aligned}$$

Considere

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow \begin{cases} y = ux \\ dy = x\,du + u\,dx \end{cases}$$

Assim, a equação pode ser rescrita como

$$\begin{aligned}\left(u + u^2 + 1\right)dx - \left(x\,du + u\,dx\right) &= 0 && \Leftrightarrow \\ \left(u^2 + 1\right)dx - x\,du &= 0 && \Leftrightarrow \\ \tfrac{dx}{x} &= \frac{du}{u^2+1} && \Leftrightarrow \\ \ln|x| &= \operatorname{arctg} u + c_0 &&\end{aligned}$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$. *Trazendo de volta a variável* y, *tem-se*

$$\ln|x| = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + c_0 \quad \Leftrightarrow$$

$$y = x\operatorname{tg}\left(\ln|x| - c_0\right)$$

■

Exercício 5 *Reescrevendo a equação diferencial*

$$(x+1)\left(y' + y^2\right) = -y,$$

tem-se

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x+1}y = -y^2$$

*que é uma **equação de Bernoulli** e pode ainda ser vista como*

$$-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x+1}\frac{1}{y} = 1$$

Considere

$$u = y^{-1}$$

e observe que

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= -y^{-2}\frac{dy}{dx} \\ &= -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}\end{aligned}$$

*e, substituindo na **edo** dada, tem-se*

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x+1}u = 1$$

*Ou seja, a **edo** resultante é **linear**, com*

$$\begin{aligned}P(x) &= -\frac{1}{x+1} \\ f(x) &= 1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int P(x)dx &= \int -\frac{dx}{x+1} \\ &= -\ln|x+1| + c_0\end{aligned}$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$*. O **fator integrante** desta equação será então*

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\int P(x)dx} \\ &= e^{-\ln|x+1|+c_0} \\ &= \pm e^{c_0}(x+1)^{-1} \\ &= \frac{c_1}{x+1}\end{aligned}$$

onde $c_1 = \pm e^{c_0}$*. Tomando* $c_1 = 1$*, tem-se*

$$\begin{aligned}u(x) &= \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)f(x)dx \\ &= (x+1)\int \frac{dx}{x+1} \\ &= (x+1)(\ln|x+1| + c)\end{aligned}$$

com $c \in \mathbb{R}$*. Trazendo a variável* y *de volta, tem-se*

$$\begin{aligned}\frac{1}{y} &= u & \Leftrightarrow \\ \frac{1}{y} &= (x+1)(\ln|x+1| + c)\end{aligned}$$

Ou seja,

$$y(x) = \frac{1}{(x+1)(\ln|x+1| + c)}$$

$\blacksquare$