Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito Prova Final **2020**
Data: Quarta-feira, 23 de Junho de 2021 **Turma C4**

Exercício 1 *Deseja-se determinar todas as soluções da* ***edo***

$$y' + 4xy = x^3 e^{x^2}$$

Observe que trata-se de uma ***edo*** *linear de 1^a ordem, cujo fator integrante é dado por*

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\int 4x dx}\\ &= e^{2x^2+c_1}\end{aligned}$$

Desta forma, considerando $c_1 = 0$, segue-se que

$$\begin{aligned}[\mu(x)y(x)]' &= \mu'(x)y(x) + \mu(x)y'(x)\\ &= 4xe^{2x^2}y(x) + e^{2x^2}y'(x)\\ &= e^{2x^2}\left(4xy(x) + y'(x)\right)\end{aligned}$$

Ou seja, multiplicando-se ambos os lados da ***edo*** *dada por $\mu(x)$, tem-se*

$$\begin{aligned}e^{2x^2}(4xy + y') &= e^{2x^2}x^3e^{x^2} && \Rightarrow\\ [\mu\, y]' &= x^3e^{3x^2} && \Rightarrow\\ \mu\, y &= \int x^3e^{3x^2}dx && \Rightarrow\\ \mu\, y &= e^{3x^2}\left(\tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{1}{18}\right) + c_2 && \Rightarrow\\ y &= \frac{1}{\mu(x)}\left[e^{3x^2}\left(\tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{1}{18}\right) + c_2\right] && \Rightarrow\\ y &= \frac{1}{e^{2x^2}}\left[e^{3x^2}\left(\tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{1}{18}\right) + c_2\right] && \Rightarrow\\ y &= e^{x^2}\left(\tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{1}{18}\right) + c_2e^{-2x^2}\end{aligned}$$

Com $c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 2 *Deseja-se resolver a equação*

$$y''' + y'' - 2y = 0$$

Observe que trata-se de uma equação diferencial linear de 3^a ordem com ***coeficientes constantes*** *cuja equação auxiliar é dada por*

$$m^3 + m^2 - 2 = 0$$

As soluções desta equação são

$$\begin{aligned}m_1 &= 1\\ m_2 &= -1 + i\\ m_3 &= -1 - i\end{aligned}$$

Donde segue-se que três soluções linearmente independentes da edo em questão são dadas por

$$\begin{aligned}y_1 &= e^x\\ y_2 &= e^{-x}\cos x\\ y_3 &= e^{-x}\operatorname{sen} x\end{aligned}$$

e a soluação geral é

$$\begin{aligned}y &= c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3\\ &= c_1e^x + c_2e^{-x}\cos x + c_3e^{-x}\operatorname{sen} x\end{aligned}$$

com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Usando o* ***método da variação de parâmetros****, a solução particular y_p que deseja-se encontrar é dada por*

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

Onde

$$\begin{aligned}u_1' &= \frac{W_1}{W}\\ u_2' &= \frac{W_2}{W}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x & x\ln x \\ 1 & \ln x + 1 \end{vmatrix} \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & x\ln x \\ \frac{1}{x} & \ln x + 1 \end{vmatrix} \\ &= -\ln x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} \\ &= 1 \end{aligned}$$

sendo $g(x) = \dfrac{1}{x}$ *(função que torna a equação não homogênea). Assim,*

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{-\ln x}{x} &\Rightarrow\quad u_1 &= -\frac{\ln^2 x}{2} \\ u_2' &= \frac{1}{x} &\Rightarrow\quad u_2 &= \ln x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_p &= -\frac{\ln^2 x}{2}x + \ln x\,(x\ln x) \\ &= \frac{1}{2}x\ln^2 x \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Observe que $x = 0$ é um ponto ordinário para a* ***edo***

$$y'' - y' + xy = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned} y'' - y' + xy = 0 \quad &\Rightarrow \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + & \\ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \quad &\Rightarrow \\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - & \\ - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\ 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - & \\ -a_1 - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0 \quad &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$[12pt] 2a_2 - a_1 +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + a_{n-1}\right]x^n = 0$$

Portanto,

$$\left\{ \begin{aligned} 2a_2 - a_1 &= 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + a_{n-1} &= 0 \end{aligned} \right. \quad \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_2 &= \frac{a_1}{2} \\ a_{n+2} &= \frac{(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \end{aligned} \right. \quad \Rightarrow$$

Tomando $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, tem-se

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = 0$$

$$a_3 = -\frac{1}{6}$$

$$a_4 = -\frac{1}{24}$$

$$a_5 = -\frac{1}{120}$$

$$\ldots$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 + \cdots \end{aligned}$$

Tomando agora, $a_0 = 0$ *e* $a_1 = 1$, *tem-se*

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2} \\ a_3 &= \frac{1}{6} \\ a_4 &= -\frac{1}{24} \\ a_5 &= -\frac{1}{30} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots \end{aligned}$$

E a solução geral da ***edo*** *é dada por*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Observe que o termo geral desta série é dado por*

$$a_n = \frac{2^n (x-3)^n}{n+3}$$

Assim, segue-se que

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}(x-3)^{n+1}}{n+4}$$

e

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{2^{n+1}(x-3)^{n+1}}{n+4}\,\frac{n+3}{2^n(x-3)^n}\right| \\ &= \left|2(x-3)\frac{n+3}{n+4}\right| \\ &= |2|\left|\frac{n+3}{n+4}\right||x-3| \\ &= 2\left(\frac{n+3}{n+4}\right)|x-3| \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{n+3}{n+4}\right)|x-3| \\ &= 2\,|x-3| \lim_{n\to+\infty}\frac{n+3}{n+4} \\ &= 2\,|x-3| \end{aligned}$$

Usando o ***teste da razão****, a série dada será absolutamente convergente quando*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

Ou seja, quando

$$\begin{aligned} 2\,|x-3| < 1 \quad &\Rightarrow \\ |x-3| < \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \\ -\frac{1}{2} < x-3 < \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \\ 3-\frac{1}{2} < x < 3+\frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \\ \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2} \quad & \end{aligned}$$

Logo, o intervalo de convergência é

$$I = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right),$$

havendo ainda a possibilidade de convergência nos extremos deste intervalo (dispensado de fazer). ■