**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral IV**

**Prof$^o$. Edson**

**1º Semestre**

**Gabarito 3ª Prova** **2020**
**Data: Sexta-feira, 25 de Junho** **Turma C4**

---

**Exercício 1** *Observe que o termo geral desta série é dado por*

$$a_n = n^k 3^{-n}$$

*Assim, segue-se que*

$$a_{n+1} = (n+1)^k 3^{-n-1}$$

*e*

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(n+1)^k 3^{-n-1}}{n^k 3^{-n}}\right| \\ &= \left|\frac{(n+1)^k 3^{-n} 3^{-1}}{n^k 3^{-n}}\right| \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^k\end{aligned}$$

*Portanto,*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^k \\ &= \frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^k \\ &= \frac{1}{3} < 1\end{aligned}$$

*Logo, pelo* ***teste da razão****, a série dada será absolutamente convergente para qualquer valor de $k \in \mathbb{R}$.* ■

**Exercício 2** *O termo geral desta série é dado por*

$$a_n = \frac{x^{3n+1}}{64^n}$$

*Assim, segue-se que*

$$a_{n+1} = \frac{x^{3n+4}}{64^{n+1}}$$

*e*

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{x^{3n+4}}{64^{n+1}}\frac{64^n}{x^{3n+1}}\right| \\ &= \left|\frac{x^3}{64}\right| \\ &= \frac{|x|^3}{64}\end{aligned}$$

*Portanto,*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^3}{64} \\ &= \frac{|x|^3}{64}\end{aligned}$$

*Usando o* ***teste da razão****, a série dada será* ***absolutamente convergente*** *quando*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \quad &\Leftrightarrow \\ \frac{|x|^3}{64} < 1 \quad &\Leftrightarrow \\ |x|^3 < 64 \quad &\Leftrightarrow \\ |x| < 4\end{aligned}$$

*Ou seja, o* ***raio de convergência*** *é 4.* ■

**Exercício 3** *Sabe-se que*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n}$$

*Logo,*

$$\begin{aligned}f(x) &= \int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n} \\ &= c + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{n+1}}{n(n+1)}\end{aligned}$$

*Além disso, é dado que*

$$f(3) = 4$$

*Ou seja*

$$c = 4$$

*Donde segue-se, finalmente que*

$$f(x) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{n+1}}{n(n+1)}$$

■

**Exercício 4** *Observe que $x = 0$ é um ponto ordinário para a* ***edo***

$$y'' + x^2 y' + xy = 0$$

*Portanto, considere a seguinte proposta de solução*

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

*Segue-se disto, que*

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

*Substituindo na equação dada, obtem-se*

$$\begin{aligned}
y'' + x^2 y' + xy = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + & \\
+ x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=-1}^{\infty} (n+3)(n+2) a_{n+3} x^{n+1} + & \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \quad &\Rightarrow \\
2a_2 + (6a_3 + a_0)\, x + & \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} (n+3)(n+2) a_{n+3} x^{n+1} & \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \quad &\Rightarrow \\
2a_2 + (6a_3 + a_0)\, x + & \\
\sum_{n=1}^{\infty} \left[ (n+3)(n+2) a_{n+3} + (n+1)\, a_n \right] x^{n+1} = 0 &
\end{aligned}$$

*Portanto,*

$$\left\{ \begin{aligned} 2a_2 &= 0 \\ 6a_3 + a_0 &= 0 \\ (n+3)(n+2) a_{n+3} + (n+1)\, a_n &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_2 &= 0 \\ a_3 &= \frac{-a_0}{6} \\ a_{n+3} &= \frac{(n+1)\, a_n}{(n+3)(n+2)} \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

*Tomando $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, tem-se*

$$a_2 = 0$$
$$a_3 = -\frac{1}{6}$$
$$a_4 = 0$$
$$a_5 = 0$$
$$a_6 = -\frac{1}{45}$$
$$a_9 = -\frac{7}{3240}$$

*Ou seja,*

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{45} x^6 - \frac{7}{3240} x^9 + \cdots \end{aligned}$$

*Tomando agora, $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, tem-se*

$$a_2 = 0$$
$$a_3 = 0$$
$$a_4 = -\frac{1}{6}$$
$$a_5 = 0$$
$$a_6 = 0$$
$$a_7 = -\frac{5}{252}$$
$$a_{10} = -\frac{1}{567}$$
$$\cdots$$

*Ou seja,*

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= x - \frac{1}{6} x^4 - \frac{5}{252} x^7 - \frac{1}{567} x^{10} + \cdots \end{aligned}$$

*E a solução geral da **edo** é dada por*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

*com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.* ■

**Exercício 5** *Observe que $x = 0$ é um ponto singular regular da equação*

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - 1\right) y = 0$$

*Deste modo, considere a seguinte proposta de solução segundo o **método de Frobenius***

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

*Segue-se disto, que*

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

*e, substituindo na equação, tem-se*

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - 1\right) y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} + \\ + x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} + \left(x^2 - 1\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^r \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^n + \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^n + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$r(r-1) a_0 + r(r+1) a_1 x + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^n + \\ r a_0 + (1+r) a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+r) a_n x^n + \\ - a_0 - a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(r^2 - 1\right) a_0 + r\,(r+2)\, a_1 x + \\ \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left[ (n+r)^2 - 1 \right] a_n + a_{n-2} \right\} x^n = 0$$

*Logo,*

$$\begin{cases} \left(r^2 - 1\right) a_0 = 0 \\ r\,(r+2)\, a_1 = 0 \\ \left[ (n+r)^2 - 1 \right] a_n + a_{n-2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r^2 - 1 = 0 \text{ ou } a_0 = 0 \\ r\,(r+2) = 0 \text{ ou } a_1 = 0 \\ a_n = \dfrac{-a_{n-2}}{(n+r)^2 - 1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r = 1 \text{ ou } r = -1 \\ a_1 = 0 \\ a_n = \dfrac{-a_{n-2}}{(n+r)^2 - 1} \end{cases}$$

*Perceba que, sendo $a_1 = 0$, segue-se da **relação de recorrência**, que*

$$a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = a_{2n+1} = 0$$

*Supondo $a_0 \neq 0$ e $r = 1$, tem-se*

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{(n+1)^2 - 1} = \frac{-a_{n-2}}{n\,(n+2)}$$

*e,*

$$a_0 = 1$$

$$a_2 = -\frac{1}{8}$$

$$a_4 = \frac{1}{192}$$

$$a_6 = -\frac{1}{9216}$$

$$\ldots$$

*Ou seja*

$$y_1 = x \left( a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \cdots \right) = x - \frac{1}{8} x^3 + \frac{1}{192} x^5 - \frac{1}{9216} x^7 + \cdots$$

*é **uma solução** da equação dada.* ■