**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral IV**

**Prof$^{o}$. Edson**

**1$^{o}$ Semestre**

**Gabarito 2ª Prova** **2020**
**Data: Terça-feira, 15 de Junho de 2021** **Turma C4**

---

**Exercício 1** *Observe que a equação dada pode ser reescrita como*

$$y'' + \frac{3}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$$

*Ou seja,*

$$P(x) = \frac{3}{x}$$

*Sabendo que*

$$y_1 = \frac{1}{x}$$

*Segue-se que*

$$\begin{aligned} \mu(x) &= -\int P(x)dx \\ &= -\int \frac{3}{x}dx \\ &= -3\ln|x| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

*Disto segue-se que*

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \frac{e^{\mu(x)}}{y_1^2} \\ &= \frac{e^{-3\ln|x|+c_0}}{\frac{1}{x^2}} \\ &= e^{c_0}e^{\ln|x|^{-3}}x^2 \\ &= e^{c_0}\,|x|^{-3}\,x^2 \\ &= e^{c_0}\frac{x^2}{|x|^3} \\ &= \pm e^{c_0}\frac{1}{x} \\ &= c_1\frac{1}{x},\ c_1 \in \mathbb{R}_* \end{aligned}$$

*e*

$$\begin{aligned} u(x) &= \int \eta(x)dx \\ &= \int c_1\frac{1}{x}dx \\ &= c_1\ln x + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

*Tomando $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$, segue-se que,*

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x)u(x) \\ &= \frac{\ln x}{x} \end{aligned}$$

■

**Exercício 2** *A* ***equação característica*** *da* ***edo*** *em questão é dada por*

$$m^2 + 3m + 3 = 0,$$

*cuja solução é*

$$m_1 = -\tfrac{3}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$m_2 = -\tfrac{3}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

*Ou seja,*

$$\alpha = -\tfrac{3}{2}$$

$$\beta = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

*e, o* ***conjunto fundamental de soluções*** *é*

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x}\cos\beta x \\ &= e^{-\frac{3x}{2}}\cos\tfrac{\sqrt{3}x}{2} \\ y_2 &= e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \\ &= e^{-\frac{3x}{2}}\operatorname{sen}\tfrac{\sqrt{3}x}{2} \end{aligned}$$

*Logo, a* ***solução geral*** *da equação*

$$\begin{aligned} y &= c_1y_1 + c_2y_2 \\ &= c_1e^{-\frac{3x}{2}}\cos\tfrac{\sqrt{3}x}{2} + c_2e^{-\frac{3x}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}x}{2} \\ &= e^{-\frac{3x}{2}}\left(c_1\cos\tfrac{\sqrt{3}x}{2} + c_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \end{aligned}$$

■

**Exercício 3** *Observe que a* ***parte homogênea*** *da* ***edo*** *possui* ***equação característica***

$$m^2 - 4 = 0$$

*Ou seja,*

$$m_1 = 2$$

$$m_2 = -2$$

*e*

$$y_1 = e^{2x}$$

$$y_2 = e^{-2x}$$

*com* ***solução complementar***

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} \end{aligned}$$

*com* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

*Para* ***solução particular*** *da equação dada, considere a seguinte proposta*

$$y_p = x\left(Ae^{2x} + Be^{-2x}\right)$$

*Disto segue-se que*

$$\begin{aligned} y_p' &= Ae^{2x} + Be^{-2x} + 2x\left(Ae^{2x} - Be^{-2x}\right) \\ v &= (2x+1)\,Ae^{2x} + (-2x+1)\,Be^{-2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p'' &= 2Ae^{2x} + 2\,(2x+1)\,Ae^{2x} - 2Be^{-2x} - \\ &\quad - 2\,(-2x+1)\,Be^{-2x} \\ &= 4\,(x+1)\,Ae^{2x} + 4\,(x-1)\,Be^{-2x} \end{aligned}$$

*Substituindo na equação tem-se*

$$\begin{aligned} y_p'' - 4y_p = 3e^{2x} + 4e^{-2x} &\quad \Leftrightarrow \\ 4\,(x+1)\,Ae^{2x} + 4\,(x-1)\,Be^{-2x} - & \\ -4x\left(Ae^{2x} + Be^{-2x}\right) = 3e^{2x} + 4e^{-2x} &\quad \Leftrightarrow \\ 4Ae^{2x} - 4Be^{-2x} = 3e^{2x} + 4e^{-2x} & \end{aligned}$$

*Ou seja*

$$A = \tfrac{3}{4}$$

$$B = -1$$

*e*

$$y_p = x\left(\frac{3}{4}e^{2x} - e^{-2x}\right)$$

*A* ***solução geral*** *é, portanto*

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + x\left(\frac{3}{4}e^{2x} - e^{-2x}\right) \\ &= \left(c_1 + \frac{3}{4}x\right)e^{2x} + (c_2 - x)\,e^{-2x} \end{aligned}$$

■

**Exercício 4** *A* ***equação característica*** *da parte homogênea da* ***edo*** *em questão é dada por*

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 0$$

*ou seja*

$$m_1 = m_2 = 1$$

*e, o conjunto fundamental de soluções é*

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{m_1 x} \\ &= e^{x} \\ y_2 &= xe^{m_1 x} \\ &= xe^{x} \end{aligned}$$

*Usando o* ***método da variação de parâmetros****, tem-se que*

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)\,e^x \end{vmatrix} \\ &= e^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{2e^x}{x} & (x+1)\,e^x \end{vmatrix} \\ &= -2e^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{2e^x}{x} \end{vmatrix} \\ &= \frac{2e^{2x}}{x} \end{aligned}$$

*e,*

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{-2e^{2x}}{e^{2x}} = -2$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{\frac{2e^{2x}}{x}}{e^{2x}} = \frac{2}{x}$$

*Ou seja*

$$u_1 = -2x + c_0$$

$$u_2 = 2\ln|x| + c_1$$

*com $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. Considerando $c_0 = c_1 = 0$ e $x > 0$, segue-se que, uma **solução particular** da equação é*

$$y_p = y_1u_1 + y_2u_2 = -2xe^x + 2xe^x \ln x = 2xe^x(\ln x - 1)$$

■

**Exercício 5** *Considere a função*

$$y = x^m$$

*como **proposta de solução** para a equação dada. Observe que*

$$y' = mx^{m-1}$$

$$y'' = (m-1)mx^{m-2}$$

*Substituindo na equação, tem-se*

$$\begin{aligned} x^2y'' + xy' + 4y = 0 &\Leftrightarrow \\ x^2(m-1)mx^{m-2} + xmx^{m-1} + 4x^m = 0 &\Leftrightarrow \\ (m-1)mx^m + mx^m + 4x^m = 0 &\Leftrightarrow \\ \left(m^2+4\right)x^m = 0 &\Leftrightarrow \\ m^2 + 4 = 0 & \end{aligned}$$

*e,*

$$m_1 = 2\mathbf{i}$$

$$m_2 = -2\mathbf{i}$$

*Ou seja*

$$\alpha = 0$$

$$\beta = 2$$

*Portanto*

$$y_1 = \cos(2\ln x)$$

$$y_2 = \operatorname{sen}(2\ln x)$$

*e a **solução geral** é*

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1\cos(2\ln x) + c_2\operatorname{sen}(2\ln x)$$

*com $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$* ■