Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 1ª Prova **2020**
Data: Quarta-feira, 31 de Março de 2021 **Turma C4**

Exercício 1 *Deseja-se resolver a seguinte **edo***

$$2(1+x)(1+y)y' + (y+2)^2 = 0$$

*Usando **separação de variáveis**, a equação dada pode ser reescrita como*

$$\begin{aligned}
2(1+x)(1+y)\frac{dy}{dx} &= -(y+2)^2 && \Rightarrow \\
2\frac{(1+y)}{(y+2)^2}dy &= -\frac{1}{1+x}dx && \Rightarrow \\
2\int \frac{1+y}{(y+2)^2}dy &= -\int \frac{1}{1+x}dx && \Rightarrow \\
\ln|y+2| + \frac{1}{y+2} &= -\ln|1+x| + c_1
\end{aligned}$$

onde $c_1 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 2 *Deseja-se resolver o seguinte problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x^2\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 2 + x \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Observe que a equação dada pode ser reescrita como

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{2+x}{x^2}$$

*Ou seja,tem-se uma **edo linear**, com*

$$P(x) = \frac{2}{x}$$

$$f(x) = \frac{2+x}{x^2}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int P(x)dx &= \int \frac{2}{x}dx \\
&= 2\ln|x| + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

e, tomando $c_1 = 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= e^{\int P(x)dx} \\
&= e^{2\ln|x|} \\
&= e^{\ln|x|^2} \\
&= |x|^2 \\
&= x^2
\end{aligned}$$

*Além disto, a solução desta **edo** é dada por*

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{x^2}\int x^2\frac{2+x}{x^2}dx \\
&= \frac{1}{x^2}\int (2+x)\,dx \\
&= \frac{1}{x^2}\left(2x + \frac{x^2}{2} + c\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{x} + \frac{c}{x^2}
\end{aligned}$$

onde $c \in \mathbb{R}$.

Usando a condição inicial $y(1) = 1$, ou seja $x = 1$ e $y = 1$ tem-se

$$\begin{aligned}
y(1) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{1} + \frac{c}{1} && \Rightarrow \\
1 &= \frac{5}{2} + c && \Rightarrow \\
c &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Ou seja, a solução procurada, é dada por

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x} + \frac{3}{2x^2}$$

■

Exercício 3 *Deseja-se determinar todas as soluções da **edo***

$$\left(4xy + \frac{1}{x}\right)dx + \left(2x^2 - \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

Considere

$$M(x,y) = 4xy + \frac{1}{x}$$

$$N(x,y) = 2x^2 - \frac{1}{y}$$

e observe que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 4x$$

*Ou seja, a **edo** dada é **exata**. Para encontrar as soluções desta equação é necessário resolver o seguinte sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = M \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4xy + \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 - \dfrac{1}{y} \end{cases}$$

Integrando em relação à x a primeira equação sistema, obtem-se

$$f(x,y) = 2x^2y + \ln|x| + k(y)$$

Donde segue-se que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + k'(y)$$

Comparando este resultado com a segunda equação do sistema, tem-se que

$$k'(y) = -\frac{1}{y} \Leftrightarrow k(y) = -\ln|y| + c_1$$

com $c_1 \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2x^2y + \ln|x| + k(y) \\ &= 2x^2y + \ln|x| - \ln|y| + c_1 \\ &= 2x^2y + \ln\left|\frac{x}{y}\right| + c_1 \end{aligned}$$

e a solução da edo em questão é dada por

$$f(x,y) = c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

Ou seja,

$$2x^2y + \ln\left|\frac{x}{y}\right| + c_1 = c_2$$

$$2x^2y + \ln\left|\frac{x}{y}\right| = c$$

Com $c \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 4 *Deseja-se resolver a equação*

$$y' = \frac{2x^2 + y^2}{xy}$$

Reescrevendo esta equação, tem-se

$$\begin{aligned} xy\frac{dy}{dx} &= 2x^2 + y^2 && \Leftrightarrow \\ \left(2x^2 + y^2\right) dx - xy dy &= 0 && \Leftrightarrow \\ x^2 \left\{ \left[2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] dx - \frac{y}{x} dy \right\} &= 0 && \Leftrightarrow \\ \left[2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] dx - \frac{y}{x} dy &= 0 \end{aligned}$$

Considere

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow \begin{cases} y = ux \\ dy = x\,du + u\,dx \end{cases}$$

Assim, a equação pode ser rescrita como

$$\begin{aligned} \left(2 + u^2\right) dx - u\left(x\,du + u\,dx\right) &= 0 && \Leftrightarrow \\ \left(2 + u^2 - u^2\right) dx - ux\,du &= 0 && \Leftrightarrow \\ 2dx - ux\,du &= 0 && \Leftrightarrow \\ \frac{2}{x}dx &= u\,du && \Leftrightarrow \\ \int \frac{2}{x}dx &= \int u\,du && \Leftrightarrow \\ 2\ln|x| &= \frac{u^2}{2} + c_0 \end{aligned}$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$.Trazendo de volta a variável y, tem-se

$$\begin{aligned} 4\ln|x| &= \left(\frac{y}{x}\right)^2 + c_0 \quad \Leftrightarrow \\ \left(4\ln|x| - c_0\right)x^2 - y^2 &= 0 \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Observe que a **edo***

$$\frac{dy}{dx} + 2y\,\mathrm{sen}\,x = 2y^2\mathrm{sen}\,x,$$

*é uma **equação de Bernoulli** e pode ser reescrita como*

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{y}\,\mathrm{sen}\,x = 2\mathrm{sen}\,x$$

Considere

$$u = \frac{1}{y^{-1}} = y^{-1}$$

e observe que

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= -y^{-2}\frac{dy}{dx}\\ &= -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}\end{aligned}$$

*e, substituindo na **edo** dada, tem-se*

$$\frac{du}{dx} - 2\text{sen}\, x\, u = -2\text{sen}\, x$$

*Ou seja, a **edo** resultante é **linear**, com*

$$\begin{aligned}P(x) &= -2\text{sen}\, x\\ f(x) &= -2\text{sen}\, x\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int P(x)dx &= \int -2\text{sen}\, x dx\\ &= 2\cos x + c_0\end{aligned}$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$. Tomando $c_0 = 0$, o fator integrante desta equação será então

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\int P(x)dx}\\ &= e^{2\cos x}\end{aligned}$$

Além disto, segue-se que a

$$\begin{aligned}u(x) &= \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x) f(x) dx\\ &= \frac{1}{e^{2\cos x}}\int -2e^{2\cos x}\text{sen}\, x\, dx\\ &= \frac{1}{e^{2\cos x}}\left(e^{2\cos x} + c_1\right)\\ &= \frac{c_1}{e^{2\cos x}} + 1\end{aligned}$$

com $c_1 \in \mathbb{R}$. Trazendo a variável y de volta, tem-se

$$\frac{1}{y} = \frac{c_1}{e^{2\cos x}} + 1$$

Ou seja,

$$y(x) = \frac{e^{2\cos x}}{c_1 + e^{2\cos x}}$$

■