**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral IV**

**Prof$^{o}$. Edson**

**1$^{o}$ Semestre**

**Gabarito Prova Final** **2019**
**Data: Quarta-feira, 4 de Setembro** **Turma C4**

---

**Exercício 1** *Deseja-se determinar todas as soluções da **edo***

$$y' + 2y = xe^{-2x}$$

*Observe que trata-se de uma **edo** linear de 1$^{a}$ ordem. Considere*

$$p(x) = 2$$

*e observe que*

$$\int p(x)dx = 2x + c_0,\; c_0 \in \mathbb{R}$$

*Tomando $c_0 = 0$, tem-se que o fator integrante da equação dada é*

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\displaystyle\int p(x)dx} \\ &= e^{2x} \end{aligned}$$

*Assim, multiplicando ambos os lados da edo por $\mu(x)$ tem-se*

$$\begin{aligned} \mu(x)\left(y' + 2y\right) &= \mu(x)xe^{-2x} && \Rightarrow \\ \tfrac{d}{dx}\left[\mu(x)y(x)\right] &= e^{2x}xe^{-2x} && \Rightarrow \\ \mu(x)y(x) &= \int x dx && \Rightarrow \\ e^{2x}y(x) &= \frac{x^2}{2} + c_0 && \Rightarrow \\ y(x) &= e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2} + c_0\right) \end{aligned}$$

*Com $c_0 \in \mathbb{R}$.* ∎

**Exercício 2** *Deseja-se resolver a equação*

$$ydx - xdy = 2x^3 \operatorname{sen} x\, dx$$

*Reescrevendo esta equação, tem-se*

$$\begin{aligned} \left(y - 2x^3 \operatorname{sen} x\right) dx - xdy = 0 && \Leftrightarrow \\ x\frac{dy}{dx} - y = -2x^3 \operatorname{sen} x && \Leftrightarrow \\ \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = -2x^2 \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

*Ou seja, a equação dada é **linear**. Considere*

$$p(x) = -\frac{1}{x}$$

*e observe que*

$$\int p(x)dx = -\ln|x| + c_0,\; c_0 \in \mathbb{R}$$

*Tomando $c_0 = 0$, tem-se que o fator integrante da equação dada é*

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\displaystyle\int p(x)dx} \\ &= e^{-\ln|x|} \\ &= \frac{1}{|x|} \end{aligned}$$

*Escolhendo*

$$\mu(x) = \frac{1}{x},$$

*e multiplicando ambos os lados da edo por $\mu(x)$ tem-se*

$$\begin{aligned} \mu(x)\left(\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y\right) &= \mu(x)\left(-2x^2 \operatorname{sen} x\right) && \Rightarrow \\ \frac{d}{dx}\left[\mu(x)y(x)\right] &= \frac{1}{x}\left(-2x^2 \operatorname{sen} x\right) && \Rightarrow \\ \mu(x)y(x) &= \int -2x \operatorname{sen} x\, dx && \Rightarrow \\ \frac{1}{x}y(x) &= 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + c_0 && \Rightarrow \\ y(x) &= 2x^2\cos x - 2x\operatorname{sen} x + c_0 x \end{aligned}$$

*Com $c_0 \in \mathbb{R}$.* ∎

**Exercício 3** *Resolvendo inicialmente a equação homogênea associada, ou seja*

$$4y'' + 25y = 0$$

*tem-se como equação auxiliar*

$$4m^2 + 25 = 0,$$

*cujas soluções são*

$$m_1 = \frac{5}{2}i$$

$$m_2 = -\frac{5}{2}i$$

*Ou seja,*

$$y_1 = \cos\left(\frac{5}{2}x\right)$$

$$y_2 = \operatorname{sen}\left(\frac{5}{2}x\right)$$

*Donde segue-se que a solução complementar da* ***edo*** *dada é*

$$\begin{aligned} y &= c_1y_1 + c_2y_2 \\ &= c_1\cos\left(\frac{5}{2}x\right) + c_2\operatorname{sen}\left(\frac{5}{2}x\right) \end{aligned}$$

*Para encontrar uma solução particular, o* ***método do coeficientes a determinar*** *apresenta como proposta de solução a função*

$$y_p = (Ax+B)\cos x + (Cx+D)\operatorname{sen} x$$

*Onde,*

$$y_p' = (Cx + A + D)\cos x + (-Ax + C - B)\operatorname{sen} x$$

$$y_p'' = (-Cx - D - 2A)\operatorname{sen} x + (-Ax - B + 2C)\cos x$$

*Substituindo na equação dada*

$$4y_p'' + 25y_p = x\cos x \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned} 21D - 8A &= 0 \\ 21B + 8C &= 0 \\ 21A &= 1 \\ 21C &= 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow \begin{aligned} A &= \frac{1}{21} \\ B &= 0 \\ C &= 0 \\ D &= \frac{8}{441} \end{aligned}$$

*Ou seja,*

$$y_p = \frac{1}{21}x\cos x + \frac{8}{441}\operatorname{sen} x$$

*E a solução geral da* ***edo*** *dada é*

$$\begin{aligned} y_g &= y_c + y_p \\ &= c_1\cos\left(\frac{5}{2}x\right) + c_2\operatorname{sen}\left(\frac{5}{2}x\right) + \frac{1}{21}x\cos x + \\ &+ \frac{8}{441}\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

*com* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ∎

**Exercício 4** *A equação homogênea associada possui equação auxiliar dada por*

$$4m^2 - 4m - 3 = 0$$

*cujas solução são*

$$m_1 = -\frac{1}{2}$$

$$m_2 = \frac{3}{2}$$

*Ou seja*

$$y_1 = e^{-\frac{x}{2}}$$

$$y_2 = e^{\frac{3x}{2}}$$

*e a solução complementar da edo dada é*

$$\begin{aligned} y_c &= c_1y_1 + c_2y_2 \\ &= c_1e^{-\dfrac{x}{2}} + c_2e^{\dfrac{3x}{2}} \end{aligned}$$

*com* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Usando o método dos coeficientes a determinar, uma proposta de solução particular é dada por*

$$y_p = A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x$$

*Donde segue-se que*

$$y_p' = -2A\operatorname{sen} 2x + 2B\cos 2x$$

$$y_p'' = -4A\cos 2x - 4B\operatorname{sen} 2x$$

*e, substuindo na equação*

$$4y_p'' - 4y_p' - 3y_p = \cos 2x \Rightarrow$$

$$(-18A - 8B)\cos 2x + (-18B + 8A)\operatorname{sen} 2x = \cos 2x$$

$$\left\{\begin{aligned} 8A - 19B &= 0 \\ -8B - 19A &= 1 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} A &= -\frac{19}{425} \\ B &= -\frac{8}{425} \end{aligned}\right.$$

*Ou seja,*

$$y_p = -\frac{19}{425}\cos 2x - \frac{8}{425}\operatorname{sen} 2x$$

*e a solução geral da equação diferencial dada é*

$$\begin{aligned} y_g &= y_c + y_p \\ &= c_1e^{-\frac{x}{2}} + c_2e^{\frac{3x}{2}} - \frac{19}{425}\cos 2x - \frac{8}{425}\operatorname{sen} 2x \end{aligned}$$

∎

**Exercício 5** *Observe que $x = 0$ é um ponto ordinário para a **edo***

$$(1+x^2)y'' + xy' + xy = 0$$

*Portanto, considere a seguinte proposta de solução*

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

*Segue-se disto, que*

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

*Substituindo na equação dada, obtem-se*

$$\begin{aligned}
(1+x^2)y'' + xy' + xy = 0 \quad &\Rightarrow \\
(1+x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + & \\
+x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + & \\
+\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + & \\
+\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0 \quad &\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2a_2 + (6a_3 + a_1 + a_0)\,x + & \\
+\sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + & \\
+\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
2a_2 + (6a_3 + a_1 + a_0)\,x + & \\
\sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + n^2 a_n + a_{n-1}\right] x^n = 0 &
\end{aligned}$$

*Portanto,*

$$\begin{cases} 2a_2 = 0 \\ 6a_3 + a_1 + a_0 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} + n^2 a_n + a_{n-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ a_3 = \dfrac{-a_1 - a_0}{6} \\ a_{n+2} = \dfrac{-n^2 a_n - a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \end{cases} \Rightarrow$$

*Tomando $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, tem-se*

$$a_2 = 0$$
$$a_3 = -\frac{1}{6}$$
$$a_4 = 0$$
$$a_5 = \frac{3}{40}$$
$$a_6 = \frac{1}{180}$$
$$\ldots$$

*Ou seja,*

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{1}{180}x^6 \cdots \end{aligned}$$

*Tomando agora, $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, tem-se*

$$a_2 = 0$$
$$a_3 = -\frac{1}{6}$$
$$a_4 = -\frac{1}{12}$$
$$a_5 = \frac{3}{40}$$
$$a_6 = \frac{1}{20}$$
$$\ldots$$

*Ou seja,*

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{1}{20}x^6 \cdots \end{aligned}$$

*E a solução geral da **edo** é dada por*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

*com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.* ■