Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Profº. Edson

1º Semestre

Gabarito 3ª Prova **2019**
Data: Quarta-feira, 4 de Setembro **Turma C4**

Exercício 1 *Observe que o termo geral desta série é dado por*

$$a_n = \frac{2^n(x-3)^n}{n+3}$$

Assim, segue-se que

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}(x-3)^{n+1}}{n+4}$$

e

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{2^{n+1}(x-3)^{n+1}}{n+4}\frac{n+3}{2^n(x-3)^n}\right| \\
&= \left|2(x-3)\frac{n+3}{n+4}\right| \\
&= |2|\left|\frac{n+3}{n+4}\right||x-3| \\
&= 2\left(\frac{n+3}{n+4}\right)|x-3|
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{n+3}{n+4}\right)|x-3| \\
&= 2|x-3|\lim_{n\to+\infty}\frac{n+3}{n+4} \\
&= 2|x-3|
\end{aligned}$$

Usando o ***teste da razão****, a série dada será absolutamente convergente quando*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

Ou seja, quando

$$\begin{aligned}
2|x-3| < 1 \quad &\Rightarrow \\
|x-3| < \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \\
-\frac{1}{2} < x-3 < \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \\
3-\frac{1}{2} < x < 3+\frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \\
\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Logo, o intervalo de convergência é

$$I = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right),$$

havendo ainda a possibilidade de convergência nos extremos deste intervalo (dispensado de fazer). ■

Exercício 2 *Observe que*

$$\begin{aligned}
\frac{s+1}{s^3+2s} &= \frac{s+1}{s\,(s^2+2)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+2} + \frac{1}{s^2+2}
\end{aligned}$$

Logo, aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ e usando a sua linearidade, obtem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^3+2s}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+2} + \frac{1}{s^2+2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\right\} + \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right\} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t
\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Observe que $x = 0$ é um ponto ordinário para a* ***edo***

$$(1+x^2)y'' + xy' + xy = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$(1+x^2)y''+xy'+xy=0 \quad\Rightarrow$$

$$(1+x^2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+$$
$$+x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0 \quad\Rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0 \quad\Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=0 \quad\Rightarrow$$

$$2a_2+(6a_3+a_1+a_0)\,x+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^n=0 \quad\Rightarrow$$
$$2a_2+(6a_3+a_1+a_0)\,x+$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+n^2a_n+a_{n-1}\right]x^n=0$$

Portanto,

$$\begin{cases} 2a_2=0 \\ 6a_3+a_1+a_0=0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2}+n^2a_n+a_{n-1}=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_2=0 \\ a_3=\dfrac{-a_1-a_0}{6} \\ a_{n+2}=\dfrac{-n^2a_n-a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \end{cases} \Rightarrow$$

Tomando $a_0=1$ e $a_1=0$, tem-se

$$a_2=0$$
$$a_3=-\frac{1}{6}$$
$$a_4=0$$
$$a_5=\frac{3}{40}$$
$$a_6=\frac{1}{180}$$
$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_1(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_5x^5+\cdots$$
$$=1-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{1}{180}x^6\cdots$$

Tomando agora, $a_0=0$ e $a_1=1$, tem-se

$$a_2=0$$
$$a_3=-\frac{1}{6}$$
$$a_4=-\frac{1}{12}$$
$$a_5=\frac{3}{40}$$
$$a_6=\frac{1}{20}$$
$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_2(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_5x^5+\cdots$$
$$=x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{12}x^4+\frac{3}{40}x^5+\frac{1}{20}x^6\cdots$$

*E a solução geral da **edo** é dada por*

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

com $c_1,c_2\in\mathbb{R}$. ■

Exercício 4 *Observe que $x=0$ é um ponto singular regular da equação*

$$(x^2+x)y''-2y'-2y=0$$

*Deste modo, considere a seguinte proposta de solução segundo o **método de Frobenius***

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$$

Segue-se disto, que

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}$$

e, substituindo na equação, tem-se

$$(x^2+x)y''-2y'-2y=0 \quad \Rightarrow$$

$$(x^2+x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}-$$
$$-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-1}-$$
$$-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0 \quad \Rightarrow$$

$$x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n}+\right.$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n-1}-$$
$$\left.-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n}\right]=0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n-1}-$$
$$-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)-2\right]a_nx^{n}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)-2(n+r)\right]a_nx^{n-1}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)-2\right]a_nx^{n}+$$
$$+\sum_{n=-1}^{\infty}\left[(n+r+1)(n+r)-2(n+r+1)\right]a_{n+1}x^{n}=0 \quad \Rightarrow$$

$$(r-3)ra_0x^{-1}+$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[(n+r)(n+r-1)-2\right]a_n+\right.$$
$$\left.+(n+r-2)(n+r+1)a_{n+1}\right\}x^n=0$$

Logo,

$$\begin{cases} (r-3)ra_0=0 \\ \left[(n+r)(n+r-1)-2\right]a_n+ \\ +(n+r-2)(n+r+1)a_{n+1}=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (r-3)r=0 \textit{ ou } a_0=0 \\ a_{n+1}=-\dfrac{(n+r-2)(n+r+1)}{(n+r)(n+r-1)-2}a_n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r=3 \textit{ ou } r=0 \\ a_{n+1}=-\dfrac{(n+r-2)(n+r+1)}{(n+r)(n+r-1)-2}a_n \end{cases}$$

1^o Caso: *Suponha $a_0\neq 0$ e $r=0$*

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=-\frac{(n-2)(n+1)}{n(n-1)-2}a_n \\ &=-\frac{n^2-n-2}{n^2-n-2}a_n \\ &=-a_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0&=1 \\ a_1&=-1 \\ a_2&=1 \\ a_3&=-1 \\ a_4&=1 \\ a_5&=-1 \\ &\cdots \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} y_1&=x^0\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\right) \\ &=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots \\ &=\frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

2^o Caso: *Suponha $a_0\neq 0$ e $r=3$. A relação de recorrência torna-se*

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=-\frac{(n+1)(n+4)}{(n+3)(n+2)-2}a_n \\ &=-\frac{n^2+5n+4}{n^2+5n+4}a_n \\ &=-a_n \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= -1 \\ a_2 &= 1 \\ a_3 &= -1 \\ a_4 &= 1 \\ a_5 &= -1 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} y_2 &= x^3\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots\right) \\ &= x^3\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots\right) \\ &= x^3\left(\frac{1}{1+x}\right) \\ &= \frac{x^3}{1+x} \end{aligned}$$

Assim, a solução geral da equação dada é

$$\begin{aligned} y_c &= c_1y_1 + c_2y_2 \\ &= c_1\frac{1}{1+x} + c_2\frac{x^3}{1+x} \\ &= \frac{1}{1+x}\left(c_1 + c_2x^3\right) \end{aligned}$$

sendo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Usando a **transformada de Laplace** para resolver o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

Obtem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'' - 5y' + 6y\} &= \mathcal{L}\{0\} \quad \Rightarrow \\ \mathcal{L}\{y''\} - 5\mathcal{L}\{y'\} + 6\mathcal{L}\{y\} &= 0 \qquad \Rightarrow \\ s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - \\ -5\left(s\mathcal{L}\{y\} - y(0)\right) + 6\mathcal{L}\{y\} &= 0 \end{aligned}$$

Considerando $\mathcal{L}\{y\} = Y$ *e lembrando que* $y(0) = 1$ *e* $y'(0) = 3$, *tem-se*

$$\begin{aligned} s^2Y - s - 3 - 5sY + 5 + 6Y &= 0 \quad \Rightarrow \\ \left(s^2 - 5s + 6\right)Y + 2 - s &= 0 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{s-2}{s^2 - 5s + 6} \\ &= \frac{s-2}{(s-3)(s-2)} \\ &= \frac{1}{s-3} \end{aligned}$$

Aplicando agora a transformada inversa,

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} \\ &= e^{3t} \end{aligned}$$

■