Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 2^{a} Prova **2019**
Data: Quinta-feira, 15 de Agosto **Turma C4**

Exercício 1 *Observe inicialmente que a equação dada pode ser reescrita como*

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$$

Assim, considerando $p(x) = -\frac{1}{x}$ *e, usando o* ***método de redução de ordem****, tem-se que a outra solução que deseja-se encontrar é dada por*

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx$$

Perceba que

$$\begin{aligned}\int p(x)dx &= \int \frac{-1}{x} dx \\ &= -\ln|x| + c_0\end{aligned}$$

Tomando $c_0 = 0$ *e considerando* $|x| = x$ *(esta é uma das soluções possíveis e qualquer uma serve aos propósitos deste problema), tem-se que*

$$\begin{aligned}y_2 &= y_1 \int \frac{e^{\ln x}}{y_1^2} dx \\ &= x\ln x \int \frac{x}{x^2 \ln^2 x} dx \\ &= x\ln x \int \frac{dx}{x \ln^2 x} \\ &= x \ln x \left(\frac{-1}{\ln x} + c_1 \right)\end{aligned}$$

Tomando $c_1 = 0$ *(novamente, estamos interessados em uma solução qualquer), tem-se*

$$y_2 = -x$$

Para verificar que y_1 *e* y_2 *são linearmente independentes poderíamos usar o* ***Wronskiano****, mas isto é desnecessário uma vez que o* ***método de redução de ordem*** *garante que a solução* y_2 *encontrada é linearmente independente de* y_1. ■

Exercício 2 *Sendo*

$$8y''' + y'' = 0$$

a equação diferencial dada, tem-se que sua equação auxiliar é dada por

$$8m^3 + m^2 = 0$$

Ou seja,

$$m^2(8m+1) = 0$$

e, esta equção possui soluções

$$m_1 = 0$$

$$m_2 = 0$$

$$m_3 = \frac{-1}{8}$$

Segue-se disto, que

$$y_1 = e^{m_1 x} = 1$$

$$y_2 = xy_1 = x$$

$$y_3 = e^{m_3 x} = e^{-\frac{x}{8}}$$

Sendo, portanto a solução geral da equação diferencial dada

$$\begin{aligned}y_c &= c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 \\ &= c_1 + c_2x + c_3e^{-\frac{x}{8}}\end{aligned}$$

com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Resolvendo inicialmente a equação homogênea associada, ou seja*

$$4y'' + 25y = 0$$

tem-se como equação auxiliar

$$4m^2 + 25 = 0,$$

cujas soluções são

$$m_1 = \frac{5}{2}i$$

$$m_2 = -\frac{5}{2}i$$

Ou seja,

$$y_1 = \cos\left(\frac{5}{2}x\right)$$

$$y_2 = \operatorname{sen}\left(\frac{5}{2}x\right)$$

Donde segue-se que a solução complementar da ***edo*** *dada é*

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 \cos\left(\frac{5}{2}x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{5}{2}x\right) \end{aligned}$$

Para encontrar uma solução particular, o ***método do coeficientes a determinar*** *apresenta como proposta de solução a função*

$$y_p = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\operatorname{sen} x$$

Onde,

$$y_p' = (Cx + A + D)\cos x + (-Ax + C - B)\operatorname{sen} x$$

$$y_p'' = (-Cx - D - 2A)\operatorname{sen} x + (-Ax - B + 2C)\cos x$$

Substituindo na equação dada

$$4y_p'' + 25y_p = x\cos x \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned} 21D - 8A &= 0 \\ 21B + 8C &= 0 \\ 21A &= 1 \\ 21C &= 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow \begin{aligned} A &= \frac{1}{21} \\ B &= 0 \\ C &= 0 \\ D &= \frac{8}{441} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$y_p = \frac{1}{21}x\cos x + \frac{8}{441}\operatorname{sen} x$$

E a solução geral da ***edo*** *dada é*

$$\begin{aligned} y_g &= y_c + y_p \\ &= c_1 \cos\left(\frac{5}{2}x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{5}{2}x\right) + \frac{1}{21}x\cos x + \\ &\quad + \frac{8}{441}\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 4 *Usando o* ***método da variação de parâmetros****, a solução particular* y_p *que deseja-se encontrar é dada por*

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

Onde

$$u_1' = \frac{W_1}{W}$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W}$$

e

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x & x\ln x \\ 1 & \ln x + 1 \end{vmatrix} \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & x\ln x \\ \frac{1}{x} & \ln x + 1 \end{vmatrix} \\ &= -\ln x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} \\ &= 1 \end{aligned}$$

sendo $g(x) = \dfrac{1}{x}$ *(função que torna a equação não homogênea). Assim,*

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{-\ln x}{x} &\Rightarrow\quad u_1 &= -\frac{\ln^2 x}{2} \\ u_2' &= \frac{1}{x} &\Rightarrow\quad u_2 &= \ln x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_p &= -\frac{\ln^2 x}{2}x + \ln x\,(x\ln x) \\ &= \frac{1}{2}x\ln^2 x \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *A equação homogênea associada possui equação auxiliar dada por*

$$4m^2 - 4m - 3 = 0$$

cujas solução são

$$m_1 = -\frac{1}{2}$$

$$m_2 = \frac{3}{2}$$

Ou seja

$$y_1 = e^{-\frac{x}{2}}$$

$$y_2 = e^{\frac{3x}{2}}$$

e a solução complementar da edo dada é

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 e^{-\dfrac{x}{2}} + c_2 e^{\dfrac{3x}{2}} \end{aligned}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Usando o método dos coeficientes a determinar, uma proposta de solução particular é dada por*

$$y_p = A\cos 2x + B\,\text{sen}\,2x$$

Donde segue-se que

$$y_p' = -2A\,\text{sen}\,2x + 2B\cos 2x$$

$$y_p'' = -4A\cos 2x - 4B\,\text{sen}\,2x$$

e, substuindo na equação

$$4y_p'' - 4y_p' - 3y_p = \cos 2x \Rightarrow$$

$$(-18A - 8B)\cos 2x + (-18B + 8A)\,\text{sen}\,2x = \cos 2x$$

$$\begin{cases} 8A - 19B = 0 \\ -8B - 19A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{19}{425} \\ B = -\dfrac{8}{425} \end{cases}$$

Ou seja,

$$y_p = -\frac{19}{425}\cos 2x - \frac{8}{425}\,\text{sen}\,2x$$

e a solução geral da equação diferencial dada é

$$\begin{aligned} y_g &= y_c + y_p \\ &= c_1 e^{-\frac{x}{2}} + c_2 e^{\frac{3x}{2}} - \frac{19}{425}\cos 2x - \frac{8}{425}\,\text{sen}\,2x \end{aligned}$$

■