Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 1ª Prova **2019**
Data: Quarta-feira, 5 de Junho **Turma C4**

Exercício 1

a). *Deseja-se resolver a seguinte* ***edo***

$$x\frac{dy}{dx} = (1+y)^2$$

Usando ***separação de variáveis****, a equação dada pode ser reescrita como*

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{(1+y)^2} &= \frac{dx}{x} && \Rightarrow\\
\int \frac{dy}{(1+y)^2} &= \int \frac{dx}{x} && \Rightarrow\\
\frac{-1}{1+y} &= \ln|x| + c_1 && \Rightarrow\\
\frac{-1}{\ln|x|+c_1} &= 1+y && \Rightarrow\\
y &= \quad -1 - \frac{1}{\ln|x|+c_1}
\end{aligned}$$

onde $c_1 \in \mathbb{R}$. □

b). *Deseja-se resolver o seguinte problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' = xye^{x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Usando-se ***separação de variáveis*** *para a resolução da* ***edo****, tem-se*

$$\frac{dy}{y} = xe^{x^2}dx$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y} &= \int xe^{x^2}dx && \Rightarrow\\
\ln|y| &= \frac{e^{x^2}}{2} + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R} && \Rightarrow\\
|y| &= e^{\frac{e^{x^2}}{2}} e^{c_1} && \Rightarrow\\
|y| &= c_2 e^{\frac{e^{x^2}}{2}},\ c_2 \in \mathbb{R}^*_+ && \Rightarrow\\
y &= \pm c_2 e^{\frac{e^{x^2}}{2}} && \Rightarrow\\
y &= c_3 e^{\frac{e^{x^2}}{2}}
\end{aligned}$$

onde $c_3 \in \mathbb{R}$.

Usando a condição inicial $y(0) = 1$*, ou seja* $x = 0$ *e* $y = 1$ *tem-se*

$$\begin{aligned}
1 &= c_3 e^{\frac{e^0}{2}} && \Rightarrow\\
1 &= c_3 e^{\frac{1}{2}} && \Rightarrow\\
c_3 &= e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Ou seja, a solução procurada, é dada por

$$\begin{aligned}
y &= e^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{e^{x^2}}{2}} && \Leftrightarrow\\
y &= e^{\frac{e^{x^2}-1}{2}}
\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Deseja-se determinar todas as soluções da* ***edo***

$$y' + 2y = xe^{-2x}$$

Observe que trata-se de uma **edo** *linear de 1ª ordem. Considere*

$$p(x) = 2$$

e observe que

$$\int p(x)dx = 2x + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}$$

Tomando $c_0 = 0$*, tem-se que o fator integrante da equação dada é*

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\int p(x)dx}\\ &= e^{2x}\end{aligned}$$

Assim, multiplicando ambos os lados da edo por $\mu(x)$ *tem-se*

$$\begin{aligned}
\mu(x)\left(y' + 2y\right) &= \mu(x)xe^{-2x} && \Rightarrow\\
\tfrac{d}{dx}\left[\mu(x)y(x)\right] &= e^{2x}xe^{-2x} && \Rightarrow\\
\mu(x)y(x) &= \int x dx && \Rightarrow\\
e^{2x}y(x) &= \frac{x^2}{2} + c_0 && \Rightarrow\\
y(x) &= e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2} + c_0\right)
\end{aligned}$$

Com $c_0 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Deseja-se resolver a equação*

$$ydx - xdy = 2x^3 \operatorname{sen} x\, dx$$

Reescrevendo esta equação, tem-se

$$\begin{aligned}
\left(y - 2x^3 \operatorname{sen} x\right) dx - xdy = 0 &\quad \Leftrightarrow\\
x\tfrac{dy}{dx} - y = -2x^3 \operatorname{sen} x &\quad \Leftrightarrow\\
\tfrac{dy}{dx} - \tfrac{1}{x}y = -2x^2 \operatorname{sen} x &
\end{aligned}$$

Ou seja, a equação dada é ***linear****. Considere*

$$p(x) = -\frac{1}{x}$$

e observe que

$$\int p(x)dx = -\ln|x| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}$$

Tomando $c_0 = 0$*, tem-se que o fator integrante da equação dada é*

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\int p(x)dx}\\ &= e^{-\ln|x|}\\ &= \frac{1}{|x|}\end{aligned}$$

Escolhendo

$$\mu(x) = \frac{1}{x},$$

e multiplicando ambos os lados da edo por $\mu(x)$ *tem-se*

$$\begin{aligned}
\mu(x)\left(\tfrac{dy}{dx} - \tfrac{1}{x}y\right) &= \mu(x)\left(-2x^2 \operatorname{sen} x\right) && \Rightarrow\\
\tfrac{d}{dx}\left[\mu(x)y(x)\right] &= \tfrac{1}{x}\left(-2x^2 \operatorname{sen} x\right) && \Rightarrow\\
\mu(x)y(x) &= \int -2x \operatorname{sen} x\, dx && \Rightarrow\\
\tfrac{1}{x}y(x) &= 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + c_0 && \Rightarrow\\
y(x) &= 2x^2\cos x - 2x\operatorname{sen} x + c_0 x
\end{aligned}$$

Com $c_0 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 4 *Para resolver a equação*

$$y^2 + x^2y' = xyy'$$

Observe que é possível reescrevê-la da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
y^2dx + x^2dy &= xydy \quad \Leftrightarrow\\
y^2dx + (x^2 - xy)dy &= 0
\end{aligned}$$

Ou seja, a equação dada é homogênea de grau 2. Assim,

$$\begin{aligned}
x^2\left[\frac{y^2}{x^2}dx + (1 - \frac{y}{x})dy\right] = 0 &\quad \Leftrightarrow\\
\left(\frac{y}{x}\right)^2 dx + (1 - \frac{y}{x})dy = 0 &
\end{aligned}$$

Tomando

$$u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux$$

tem-se

$$dy = xdu + udx$$

e, substuindo na equação

$$\begin{aligned}
u^2dx + (1-u)(xdu + udx) &= 0 & \Leftrightarrow \\
udx + (1-u)xdu &= 0 & \Leftrightarrow \\
\frac{dx}{x} &= \frac{u-1}{u}du & \Leftrightarrow \\
\int \frac{dx}{x} &= \int \frac{u-1}{u}du & \Leftrightarrow \\
\ln|x| &= u - \ln|u| + c_0 & \Leftrightarrow \\
\ln|x| + \ln|u| &= u + c_0 & \Leftrightarrow \\
\ln|xu| &= u + c_0 & \Leftrightarrow \\
\ln|y| &= \frac{y}{x} + c_0 & \Leftrightarrow \\
|y| &= e^{\frac{y}{x}} e^{c_0} & \Leftrightarrow \\
|y| &= c_1 e^{\frac{y}{x}} & \Leftrightarrow \\
y &= \pm c_1 e^{\frac{y}{x}} & \Leftrightarrow \\
y &= c_2 e^{\frac{y}{x}}
\end{aligned}$$

com $c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Para resolver a* ***edo***

$$xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0,$$

observe que esta equação pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
xy' + 2y &= -x^5y^3e^x & \Leftrightarrow \\
y' + \frac{2}{x}y &= -x^4e^xy^3
\end{aligned}$$

Ou seja, tem-se uma equação de Bernoulli. Assim, considere

$$u = y^{-2}$$

e observe que

$$u' = -2y^{-3}y'$$

e, substituindo na ***edo*** *dada, tem-se*

$$u' - \frac{4}{x}u = 2x^4e^x$$

Ou seja, a ***edo*** *resultante é linear cujo fator integrante é dado por*

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= e^{\int -\frac{4}{x}dx} \\
&= e^{-4\ln|x| + c_0} \\
&= \frac{e^{c_0}}{x^4}
\end{aligned}$$

Tomando $c_0 = 0$ *e multiplicando ambos os lados da* ***edo*** *em u tem-se*

$$\begin{aligned}
\mu(x)\left(u' + \frac{4}{x}u\right) &= -2x^4e^x\mu(x) & \Leftrightarrow \\
\frac{d}{dx}\left(\mu(x)u(x)\right) &= -2e^x & \Leftrightarrow \\
\frac{1}{x^4}u(x) &= -2\int e^x dx & \Leftrightarrow \\
\frac{1}{x^4}u(x) &= \quad 2e^x + c_1 & \Leftrightarrow \\
u(x) &= 2e^xx^4 + c_1x^4
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
u &= y^{-2} & \Leftrightarrow \\
u &= \frac{1}{y^2} & \Leftrightarrow \\
y^2 &= \frac{1}{u} & \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$y(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2e^xx^4 + c_1x^4}}$$

com $c_1 \in \mathbb{R}$. ■