Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito Prova Final **2017**
Data: Quarta-feira, 25 de Outubro **Turma C4**

Exercício 1 *Deseja-se resolver a seguinte **edo***

$$y' = 10^{x+y}$$

Para isto observe inicialmente que a equação dada pode ser reescrita como

$$\frac{dy}{dx} = 10^x 10^y$$

*Usando **separação de variáveis**, tem-se,*

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{10^y} &= 10^x dx && \Rightarrow\\
10^{-y} dy &= 10^x dx && \Rightarrow\\
\int 10^{-y} dy &= \int 10^x dx && \Rightarrow\\
\int e^{\ln 10^{-y}} dy &= \int e^{\ln 10^x} dx && \Rightarrow\\
\int e^{-y \ln 10} dy &= \int e^{x \ln 10} dx && \Rightarrow\\
-\frac{e^{-y\ln 10}}{\ln 10} &= \frac{e^{x \ln 10}}{\ln 10} + c_0 && \Rightarrow\\
-\frac{10^{-y}}{\ln 10} &= \frac{10^x}{\ln 10} + c_0 && \Rightarrow\\
10^{-y} &= -10^x \underbrace{-c_0 \ln 10}_{c_1} && \Rightarrow\\
10^x + 10^{-y} &= c_1
\end{aligned}$$

onde $c_1 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 2 *Para resolver a **edo***

$$\frac{dy}{dx} = y\left(xy^3 - 1\right),$$

observe que esta equaçãopode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= xy^4 - y && \Leftrightarrow\\
y' + y &= xy^4 && \Leftrightarrow\\
y^{-4}y' + y^{-3} &= x
\end{aligned}$$

Considere

$$u = y^{-3}$$

e observe que

$$u' = -3y^{-4}y'$$

Assim, segue-se que

$$\begin{aligned}
y^{-4}y' + y^{-3} &= x && \Leftrightarrow\\
-\frac{u'}{3} + u &= x && \Leftrightarrow\\
u' - 3u &= -3x
\end{aligned}$$

*Ou seja, a **edo** resultante é linear cujo fator integrante é dado por*

$$\mu(x) = e^{\displaystyle\int -3dx} = e^{-3x+c_0}$$

Tomando $c_0 = 0$ *e multiplicando ambos os lados da **edo** em u tem-se*

$$\begin{aligned}
e^{-3x}u' - 3e^{-3x}u &= -3xe^{-3x} && \Leftrightarrow\\
\tfrac{d}{dx}\left(ue^{-3x}\right) &= -3xe^{-3x} && \Leftrightarrow\\
ue^{-3x} &= -\int 3xe^{-3x}dx && \Leftrightarrow\\
ue^{-3x} &= \tfrac{1}{3}e^{-3x}\left(3x+1\right) + c_1 && \Leftrightarrow\\
u(x) &= x + \frac{1}{3} + c_1 e^{3x}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
u &= y^{-3} && \Leftrightarrow\\
u &= \frac{1}{y^3} && \Leftrightarrow\\
y^3 &= \frac{1}{u} && \Leftrightarrow\\
y(x) &= u^{-\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

ou seja

$$y(x) = \left(x + \frac{1}{3} + c_1 e^{3x}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

com $c_1 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *A equação diferencial*

$$y'' + 2y' + 2 = 0$$

pode ser reescrita como

$$y'' + 2y' = -2$$

possui ***coeficientes constantes*** *e a equação auxiliar da parte homogênea é dada por*

$$m^2 + 2m = 0$$

cujas soluções são

$$m_1 = 0$$

$$m_2 = -2$$

Ou seja, duas soluções linearmente independentes, para a ***edo*** *homogênea são dadas por*

$$y_1 = 1$$

$$y_2 = e^{-2x}$$

E a sua solução complementar é

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 + c_2 e^{-2x} \end{aligned}$$

Com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Usando o* ***método dos coeficientes a determinar****, considere como proposta de solução a função*

$$y_p = Ax$$

Substituindo na equação dada tem-se

$$y_p'' + 2y_p' = -2 \Leftrightarrow$$

$$0 + 2A = -2 \Leftrightarrow$$

$$A = -1$$

ou seja,

$$y_p = -x$$

Portanto, a solução geral da equação em questão é

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1 + c_2 e^{-2x} - x \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exercício 4 *Observe que* $x = 0$ *é um ponto ordinário para a* ***edo***

$$y'' - y' + xy = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned} y'' - y' + xy = 0 \quad &\Rightarrow \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + & \\ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \quad &\Rightarrow \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - & \\ - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\ 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - & \\ -a_1 - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0 \quad &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$[12pt] 2a_2 - a_1 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + a_{n-1} \right] x^n = 0$$

Portanto,

$$\left\{ \begin{aligned} 2a_2 - a_1 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_2 &= \frac{a_1}{2} \\ a_{n+2} &= \frac{(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

Tomando $a_0 = 1$ *e* $a_1 = 0$, *tem-se*

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = 0$$

$$a_3 = -\frac{1}{6}$$

$$a_4 = -\frac{1}{24}$$

$$a_5 = -\frac{1}{120}$$

$$\ldots$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_5x^5 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 + \cdots \end{aligned}$$

Tomando agora, $a_0 = 0$ *e* $a_1 = 1$*, tem-se*

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2} \\ a_3 &= \frac{1}{6} \\ a_4 &= -\frac{1}{24} \\ a_5 &= -\frac{1}{30} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_5x^5 + \cdots \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots \end{aligned}$$

*E a solução geral da **edo** é dada por*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Usando a **transformada de Laplace** para resolver o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Obtem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'' - 3y' + 2y\} &= \mathcal{L}\{0\} \quad \Rightarrow \\ \mathcal{L}\{y''\} - 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} &= 0 \qquad \Rightarrow \\ s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - & \\ -3\left(s\mathcal{L}\{y\} - y(0)\right) + 2\mathcal{L}\{y\} &= 0 \end{aligned}$$

Considerando $\mathcal{L}\{y\} = Y$ *e lembrando que* $y(0) = 3$ *e* $y'(0) = 1$*, tem-se*

$$\begin{aligned} s^2Y - 3s - 1 - 3sY + 9 + 2Y &= 0 \quad \Rightarrow \\ \left(s^2 - 3s + 2\right)Y + 8 - 3s &= 0 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{-8 + 3s}{s^2 - 3s + 2} \\ &= \frac{5}{s-1} - \frac{2}{s-2} \end{aligned}$$

Aplicando agora a transformada inversa,

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s-1} - \frac{2}{s-2}\right\} \\ &= 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \\ &= 5e^t - 2e^{2t} \end{aligned}$$

■