Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^o. Edson

1º Semestre

Gabarito 3ª Prova **2017**
Data: Domingo, 22 de Outubro **Turma C4**

Exercício 1 *Observe que o termo geral desta série é dado por*

$$a_n = \frac{(-1)^n(x+1)^{2n}}{3^n(n+1)^2}$$

Assim, segue-se que

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(x+1)^{2(n+1)}}{3^{n+1}(n+2)^2}$$

e

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(-1)^{n+1}(x+1)^{2(n+1)}}{3^{n+1}(n+2)^2}\frac{3^n(n+1)^2}{(-1)^n(x+1)^{2n}}\right| \\
&= \left|\frac{(-1)^n(-1)(x+1)^{2n}(x+1)^2}{3^n 3(n+2)^2}\frac{3^n(n+1)^2}{(-1)^n(x+1)^{2n}}\right| \\
&= \left|-\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2(x+1)^2\right| \\
&= \left|-\frac{1}{3}\right|\left|\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\right|\left|(x+1)^2\right| \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2(x+1)^2
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2(x+1)^2 \\
&= \frac{1}{3}(x+1)^2\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{3}(x+1)^2
\end{aligned}$$

*Usando o **teste da razão**, a série dada será absolutamente convergente quando*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

Ou seja, quando

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}(x+1)^2 < 1 \quad &\Rightarrow \\
(x+1)^2 < 3 \quad &\Rightarrow \\
|x+1| < \sqrt{3} \quad &\Rightarrow \\
-\sqrt{3} < x+1 < \sqrt{3} \quad &\Rightarrow \\
-1-\sqrt{3} < x < -1+\sqrt{3} &
\end{aligned}$$

Logo, o raio de convergência é

$$R = \sqrt{3}$$

■

Exercício 2 *Observe inicialmente que o polinômio s^2+2s+5 é irredutível (não possui raízes reais). Assim, completando seu quadrado tem-se*

$$\begin{aligned}
s^2+2s+5 &= s^2+2s+5+1-1 \\
&= (s+1)^2+4
\end{aligned}$$

Além disto, tem-se que

$$\begin{aligned}
\frac{1-3s}{s^2+2s+5} &= \frac{1-3s}{(s+1)^2+4} \\
&= \frac{1-3(s+1-1)}{(s+1)^2+4} \\
&= \frac{1-3(s+1)+3}{(s+1)^2+4} \\
&= \frac{4-3(s+1)}{(s+1)^2+4}
\end{aligned}$$

Logo, aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ e usando a sua linearidade, *obtem-se*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1-3s}{s^2+2s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4-3(s+1)}{(s+1)^2+4}\right\}$$

$$= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+4}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\}$$

$$= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\left.\frac{2}{s^2+4}\right|_{s\to s+1}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\left.\frac{s}{s^2+4}\right|_{s\to s+1}\right\}$$

$$= 2e^t \operatorname{sen} 2t - 3e^t \cos 2t$$

■

Exercício 3 *Observe que* $x = 0$ *é um ponto ordinário para a* ***edo***

$$y'' - y' + xy = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$y'' - y' + xy = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - a_1 - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$[12pt] 2a_2 - a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + a_{n-1}\right]x^n = 0$$

Portanto,

$$\begin{cases} 2a_2 - a_1 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{a_1}{2} \\ a_{n+2} = \dfrac{(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \end{cases} \Rightarrow$$

Tomando $a_0 = 1$ *e* $a_1 = 0$, *tem-se*

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = 0$$

$$a_3 = -\frac{1}{6}$$

$$a_4 = -\frac{1}{24}$$

$$a_5 = -\frac{1}{120}$$

$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_1(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 + \cdots$$

Tomando agora, $a_0 = 0$ *e* $a_1 = 1$, *tem-se*

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{6}$$

$$a_4 = -\frac{1}{24}$$

$$a_5 = -\frac{1}{30}$$

$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_2(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots$$

$$= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots$$

E a solução geral da ***edo*** *é dada por*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 4 *Observe que $x = 0$ é um ponto singular regular da equação*

$$xy'' + 5y' + xy = 0$$

Deste modo, considere a seguinte proposta de solução segundo o ***método de Frobenius***

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

e, substituindo na equação, tem-se

$$xy'' + 5y' + xy = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + +5\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + +5\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^r \left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} + +5\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}\right] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} + +5\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$r(r-1)a_0x^{-1} + (r+1)ra_1 + +\sum_{n=2}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} + +5ra_0x^{-1} + 5(r+1)a_1 + +5\sum_{n=2}^{\infty}(n+r)a_n x^{n-1} + +\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(r+4)ra_0x^{-1} + \left(r^2+6r+5\right)a_1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+r+4)(n+r)a_n + a_{n-2}\right]x^{n-1} = 0$$

Logo,

$$\begin{cases} (r+4)ra_0 = 0 \\ \left(r^2+6r+5\right)a_1 = 0 \\ (n+r+4)(n+r)a_n + a_{n-2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (r+4)r = 0 \text{ ou } a_0 = 0 \\ \left(r^2+6r+5\right) = 0 \text{ ou } a_1 = 0 \\ a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{(n+r+4)(n+r)} \end{cases}$$

1º Caso: *Suponha $a_0 = 0$ e $a_1 \neq 0$. Então*

$$r^2 + 6r + 5 = 0 \Rightarrow r = -1 \text{ ou } r = -5$$

e, para $r = -1$

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+3)(n-1)}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{5}a_0 = 0 \\ a_3 &= -\frac{1}{12}a_1 \\ a_4 &= -\frac{1}{21}a_2 = 0 \\ a_5 &= \frac{1}{384}a_1 \\ a_6 &= 0 \\ a_7 &= -\frac{1}{23\,040}a_1 \\ &\cdots \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{-1}\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots\right) \\ &= a_1 - \frac{1}{12}a_1x^2 + \frac{1}{384}a_1x^4 - \frac{1}{23\,040}a_1x^6 + \cdots \\ &= a_1\left(1 - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{384}x^4 - \frac{1}{23\,040}x^6 + \cdots\right) \end{aligned}$$

Para $r = -5$,

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n-1)(n-5)}$$

e neste caso, a relação de recorrência não está definida para $n = 5$ indicando que a solução não se enquadra na forma de série de potências.

2º Caso: *Suponha* $a_0 \neq 0$ *e* $a_1 = 0$. *Então*

$$(r+4)r = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } r = -4$$

Para $r = 0$, *a relação de recorrência torna-se*

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+4)n}$$

Ou seja

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{1}{12}a_0 \\
a_3 &= -\frac{1}{21}a_1 = 0 \\
a_4 &= \frac{1}{384}a_0 \\
a_5 &= -\frac{1}{45}a_3 = 0 \\
a_6 &= -\frac{1}{60}a_4 = -\frac{1}{23\,040}a_0 \\
a_7 &= -\frac{1}{77}a_5 = 0
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
y_2 &= x^0\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots\right) \\
&= a_0 - \frac{1}{12}a_0x^2 + \frac{1}{384}a_0x^4 - \frac{1}{23\,040}a_0x^6 + \cdots \\
&= a_0\left(1 - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{384}x^4 - \frac{1}{23\,040}x^6 + \cdots\right) \\
&= y_1
\end{aligned}$$

Para $r = -4$, *a relação de recorrência torna-se*

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-4)}$$

que não está definida para $n = 4$, *ou seja, a solução para este caso não encontra-se na forma de série de potências.* ■

Exercício 5 *Usando a* ***transformada de Laplace*** *para resolver o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Obtem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y'' - 3y' + 2y\} &= \mathcal{L}\{0\} \quad \Rightarrow \\
\mathcal{L}\{y''\} - 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} &= 0 \qquad \Rightarrow \\
s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - & \\
-3\left(s\mathcal{L}\{y\} - y(0)\right) + 2\mathcal{L}\{y\} &= 0
\end{aligned}$$

Considerando $\mathcal{L}\{y\} = Y$ *e lembrando que* $y(0) = 3$ *e* $y'(0) = 1$, *tem-se*

$$\begin{aligned}
s^2Y - 3s - 1 - 3sY + 9 + 2Y &= 0 \quad \Rightarrow \\
\left(s^2 - 3s + 2\right)Y + 8 - 3s &= 0 \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y &= \frac{-8 + 3s}{s^2 - 3s + 2} \\
&= \frac{5}{s-1} - \frac{2}{s-2}
\end{aligned}$$

Aplicando agora a transformada inversa,

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s-1} - \frac{2}{s-2}\right\} \\
&= 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \\
&= 5e^t - 2e^{2t}
\end{aligned}$$

■