

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito 2ª Prova
Data: Sexta-feira, 1 de Setembro

2017
Turma C4

Exercício 1 *Sabe-se que*

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}} \ln x$$

é uma solução da equação diferencial

$$4x^2 y'' + y = 0$$

Observe que esta equação pode ser reescrita como

$$y'' + \frac{1}{4x^2} y = 0$$

Ou seja, o coeficiente do termo de primeira ordem é a função

$$p(x) = 0$$

*Segundo o método de **redução de ordem**, uma outra solução linearmente independente para a **edo** em questão, é dada por*

$$y_2 = u(x)y_1(x)$$

sendo

$$\begin{aligned} u(x) &= \int \frac{e^{\int -p(x)dx}}{y_1^2} dx \\ &= \int \frac{e^{\int 0 dx}}{x \ln^2 x} dx \\ &= \int \frac{e^0}{x \ln^2 x} dx \\ &= \int \frac{dx}{x \ln^2 x} \end{aligned}$$

Considerando

$$\omega = \ln x$$

tem-se que

$$d\omega = \frac{dx}{x}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} u(x) &= \int \frac{dx}{x \ln^2 x} \\ &= \int \frac{d\omega}{\omega^2} \\ &= -\frac{1}{\omega} + c_0 \\ &= -\frac{1}{\ln x} + c_0 \end{aligned}$$

onde $c_0 \in \mathbb{R}$. Tomando $c_0 = 0$, segue-se que a outra solução procurada é

$$\begin{aligned} y_2 &= u(x)y_1(x) \\ &= -\frac{1}{\ln x} x^{\frac{1}{2}} \ln x \\ &= -x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *A equação diferencial*

$$y'' + 2y' + 2 = 0$$

pode ser reescrita como

$$y'' + 2y' = -2$$

*possui **coeficientes constantes** e a equação auxiliar da parte homogênea é dada por*

$$m^2 + 2m = 0$$

cujas soluções são

$$m_1 = 0$$

$$m_2 = -2$$

*Ou seja, duas soluções linearmente independentes, para a **edo** homogênea são dadas por*

$$y_1 = 1$$

$$y_2 = e^{-2x}$$

E a sua solução complementar é

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 + c_2 e^{-2x} \end{aligned}$$

Com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Usando o **método dos coeficientes a determinar**, considere como proposta de solução a função

$$y_p = Ax$$

Substituindo na equação dada tem-se

$$y_p'' + 2y_p' = -2 \Leftrightarrow$$

$$0 + 2A = -2 \Leftrightarrow$$

$$A = -1$$

ou seja,

$$y_p = -x$$

Portanto, a solução geral da equação em questão é

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1 + c_2 e^{-2x} - x \end{aligned}$$

■

Exercício 3 Deseja-se resolver a equação

$$y''' + y'' - 2y = 0$$

Observe que trata-se de uma equação diferencial linear de 3ª ordem com **coeficientes constantes** cuja equação auxiliar é dada por

$$m^3 + m^2 - 2 = 0$$

As soluções desta equação são

$$m_1 = 1$$

$$m_2 = -1 + i$$

$$m_3 = -1 - i$$

Donde segue-se que três soluções linearmente independentes da edo em questão são dadas por

$$y_1 = e^x$$

$$y_2 = e^{-x} \cos x$$

$$y_3 = e^{-x} \sin x$$

e a solução geral é

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \\ &= c_1 e^x + c_2 e^{-x} \cos x + c_3 e^{-x} \sin x \end{aligned}$$

com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

■

Exercício 4 Deseja-se resolver a edo

$$y'' + y = 2x \sin x$$

Iniciando pela parte homogênea desta equação, observe que sua equação auxiliar é

$$m^2 + 1 = 0$$

cujas soluções são

$$m_1 = i$$

$$m_2 = -i$$

Ou seja,

$$y_1 = \cos x$$

$$y_2 = \sin x$$

e a solução complementar dá-se por

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 \cos x + c_2 \sin x \end{aligned}$$

Usando o método dos **coeficientes a determinar** para encontrar uma solução particular, tem-se como proposta de solução a seguinte função

$$y_p = (Ax^2 + Bx) \sin x + (Cx^2 + Dx) \cos x$$

donde segue-se que

$$\begin{aligned} y_p'' &= [2A - 2D - (B + 4C)x - Ax^2] \sin x + \\ &\quad + [2B + 2C + (4A - D)x - Cx^2] \cos x \end{aligned}$$

e

$$y_p'' + y_p = 2x \sin x \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &[2A - 2D - (B + 4C)x - Ax^2] \sin x + \\ &+ [2B + 2C + (4A - D)x - Cx^2] \cos x + \\ &\quad + (Ax^2 + Bx) \sin x + \\ &\quad + (Cx^2 + Dx) \cos x = 2x \sin x \Leftrightarrow \\ &(2A - 2D - 4Cx) \sin x + \\ &\quad + (2B + 2C + 4Ax) \cos x = 2x \sin x \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2A - 2D = 0 \\ -4C = 2 \\ 2B + 2C = 0 \\ 4A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{2} \\ C = -\frac{1}{2} \\ D = 0 \end{cases}$$

Assim,

$$y_p = \frac{1}{2}x \sin x - \frac{1}{2}x^2 \cos x$$

e a solução geral da **edo** é

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2}x \sin x - \frac{1}{2}x^2 \cos x \end{aligned}$$

com $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 Para resolver a equação

$$y'' - 9y = \frac{9x}{e^{3x}}$$

Observe inicialmente que a parte homogênea desta **edo** possui equação auxiliar

$$m^2 - 9 = 0$$

e cujas soluções são

$$\begin{aligned} m_1 &= 3 \\ m_2 &= -3 \end{aligned}$$

Ou seja, duas soluções linearmente independentes, para esta equação, são dadas por

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{3x} \\ y_2 &= e^{-3x} \end{aligned}$$

Logo, a solução complementar da **edo** é

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} \end{aligned}$$

Usando o método da **variação de parâmetros** para determinar uma solução particular da equação

diferencial em questão, tem-se que

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= -6$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{9x}{e^{3x}} & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & e^{-3x} \\ \frac{9x}{e^{3x}} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} \\ &= 9xe^{-6x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{9x}{e^{3x}} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{3x} & 0 \\ 3e^{3x} & \frac{9x}{e^{3x}} \end{vmatrix} \\ &= 9x \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} \\ &= \frac{9xe^{-6x}}{-6} \\ &= -\frac{3}{2}xe^{-6x} \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} u_1 &= \int -\frac{3}{2}xe^{-6x} dx \\ &= \frac{1}{24}e^{-6x}(6x+1) + c_3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{W_2}{W} \\ &= \frac{9x}{-6} \\ &= -\frac{3}{2}x \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} u_2 &= \int -\frac{3}{2}x dx \\ &= -\frac{3}{4}x^2 + c_4 \end{aligned}$$

com $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

Portanto, tomando $c_3 = c_4 = 0$, uma solução

particular da equação diferencial é dada por

$$\begin{aligned} y_p &= u_1 y_1 + u_2 y_2 \\ &= \frac{1}{24} e^{-6x} (6x + 1) e^{3x} - \frac{3}{4} x^2 e^{-3x} \\ &= \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}x^2 \right) e^{-3x} \end{aligned}$$

e a solução geral é

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}x^2 \right) e^{-3x} \\ &= c_1 e^{3x} + \left(c_2 + \frac{1}{24} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}x^2 \right) e^{-3x} \\ &= c_1 e^{3x} + \left(c_5 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}x^2 \right) e^{-3x} \end{aligned}$$

com $c_1, c_5 \in \mathbb{R}$. ■