Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Profº. Edson

1º Semestre

Gabarito 1ª Prova **2017**
Data: Segunda-feira, 21 de Agosto **Turma C4**

Exercício 1

a). *Deseja-se resolver a seguinte* ***edo***

$$y' = 10^{x+y}$$

Para isto observe inicialmente que a equação dada pode ser reescrita como

$$\frac{dy}{dx} = 10^x 10^y$$

Usando ***separação de variáveis****, tem-se,*

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{10^y} &= 10^x dx & \Rightarrow\\
10^{-y}dy &= 10^x dx & \Rightarrow\\
\int 10^{-y}dy &= \int 10^x dx & \Rightarrow\\
\int e^{\ln 10^{-y}}dy &= \int e^{\ln 10^x}dx & \Rightarrow\\
\int e^{-y\ln 10}dy &= \int e^{x\ln 10}dx & \Rightarrow\\
-\frac{e^{-y\ln 10}}{\ln 10} &= \frac{e^{x\ln 10}}{\ln 10} + c_0 & \Rightarrow\\
-\frac{10^{-y}}{\ln 10} &= \frac{10^x}{\ln 10} + c_0 & \Rightarrow\\
10^{-y} &= -10^x \underbrace{-c_0\ln 10}_{c_1} & \Rightarrow\\
10^x + 10^{-y} &= c_1
\end{aligned}$$

onde $c_1 \in \mathbb{R}$. □

b). *Deseja-se resolver o seguinte problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3+2y}{x^2+3x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Usando-se ***separação de variáveis*** *para a resolução da* ***edo****, tem-se*

$$\frac{dy}{y^3+2y} = \frac{dx}{x^2+3x}$$

Observe porém que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y^3+2y} &= \frac{1}{y\left(y^2+2\right)}\\
&= \frac{1}{2y} - \frac{y}{2\left(y^2+2\right)}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2+3x} &= \frac{1}{x\left(x+3\right)}\\
&= \frac{1}{3x} - \frac{1}{3\left(x+3\right)}
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y^3+2y} &= \int \frac{dx}{x^2+3x} & \Rightarrow\\
\int \left[\frac{1}{2y} - \frac{y}{2\left(y^2+2\right)}\right]dy &= \int \left[\frac{1}{3x} - \frac{1}{3\left(x+3\right)}\right]dx & \Rightarrow\\
\tfrac{1}{2}\ln|y| - \tfrac{1}{4}\ln\left(y^2+2\right) &= \tfrac{1}{3}\ln|x| - \tfrac{1}{3}\ln|x+3| + c_0 & \Rightarrow\\
\ln\frac{\sqrt{y}}{\sqrt[4]{(y^2+2)}} &= \ln\sqrt[3]{\left|\frac{x}{x+3}\right|} + c_0 & \Rightarrow\\
\frac{\sqrt{y}}{\sqrt[4]{(y^2+2)}} &= e^{\ln\sqrt[3]{\left|\frac{x}{x+3}\right|}}e^{c_0} & \Rightarrow\\
\frac{\sqrt{y}}{\sqrt[4]{(y^2+2)}} &= \underbrace{e^{c_0}}_{c_1}\sqrt[3]{\left|\frac{x}{x+3}\right|} & \Rightarrow\\
\sqrt[4]{\frac{y^2}{y^2+2}} &= c_1\sqrt[3]{\left|\frac{x}{x+3}\right|} & \Rightarrow\\
\frac{y^2}{y^2+2} &= \underbrace{c_1^4}_{c_2}\left(\frac{x}{x+3}\right)^{\frac{4}{3}} & \Rightarrow\\
\frac{y^2}{y^2+2} &= c_2\left(\frac{x}{x+3}\right)^{\frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

onde $c_2 \in \mathbb{R}$.

Usando a condição inicial $y(1) = 1$*, ou seja* $x = 1$ *e*

$y = 1$ *tem-se*

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+2} &= c_2\left(\frac{1}{1+3}\right)^{\frac{4}{3}} && \Rightarrow\\ \frac{1}{3} &= c_2\sqrt[3]{\frac{1}{4^4}} && \Rightarrow\\ c_2 &= \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}\end{aligned}$$

Ou seja, a solução procurada, na forma implícita, é dada por

$$\begin{aligned}\frac{y^2}{y^2+2} &= \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}\left(\frac{x}{x+3}\right)^{\frac{4}{3}} && \Leftrightarrow\\ \frac{3y^2}{y^2+2} &= \left(\frac{4x}{x+3}\right)^{\frac{4}{3}} && \Leftrightarrow\\ \left(\frac{3y^2}{y^2+2}\right)^3 &= \left(\frac{4x}{x+3}\right)^4\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Deseja-se determinar todas as soluções da* ***edo***

$$(x+1)\frac{dy}{dx} + (x+2)y = 2xe^{-x}$$

Observe que trata-se de uma ***edo*** *linear de 1ª ordem. Considerando-se inicialmente apenas a parte homogênea desta equação, ou seja*

$$(x+1)\frac{dy}{dx} + (x+2)y = 0$$

e resolvendo por ***separação de variáveis*** *tem-se*

$$\begin{aligned}(x+1)\frac{dy}{dx} &= -(x+2)y && \Rightarrow\\ \frac{dy}{y} &= -\frac{x+2}{x+1}dx && \Rightarrow\\ \int\frac{dy}{y} &= -\int\frac{x+2}{x+1}dx && \Rightarrow\\ \ln|y| &= -\int\left(1+\tfrac{1}{x+1}\right)dx && \Rightarrow\\ \ln|y| &= -x-\ln|x+1|+c_0 && \Rightarrow\\ \ln|y|+\ln|x+1| &= -x+c_0 && \Rightarrow\\ \ln|y\,(x+1)| &= -x+c_0 && \Rightarrow\\ |y\,(x+1)| &= e^{-x+c_0} && \Rightarrow\\ y\,(x+1) &= \underbrace{\pm e^{c_0}}_{c_1}e^{-x} && \Rightarrow\\ y &= \frac{c_1}{e^x\,(x+1)}\end{aligned}$$

Considerando $c_1 = 1$, *tome*

$$\begin{aligned}y_1(x) &= u(x)y(x)\\ &= u(x)\frac{1}{e^x\,(x+1)}\\ &= \frac{u(x)}{e^x\,(x+1)}\end{aligned}$$

Disto segue-se que

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= \frac{u'(x)e^x(x+1) - u(x)\left[e^x(x+1)+e^x\right]}{e^{2x}(x+1)^2}\\ &= \frac{e^x\left[u'(x)(x+1) - u(x)(x+2)\right]}{e^{2x}(x+1)^2}\\ &= \frac{u'(x)(x+1) - u(x)(x+2)}{e^x(x+1)^2}\end{aligned}$$

Substituindo na ***edo*** *original tem-se*

$$\begin{aligned}(x+1)\frac{dy_1}{dx} + (x+2)y_1 &= 2xe^{-x} && \Rightarrow\\ \frac{u'(x)}{e^x} - \frac{u(x)(x+2)}{e^x(x+1)} + \frac{u(x)(x+2)}{e^x\,(x+1)} &= 2xe^{-x} && \Rightarrow\\ \frac{u'(x)}{e^x} &= 2xe^{-x} && \Rightarrow\\ u'(x) &= 2x && \Rightarrow\\ u(x) &= x^2 + c_2\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}y_1(x) &= \frac{u(x)}{e^x\,(x+1)} \Rightarrow\\ y_1(x) &= \frac{x^2+c_2}{e^x\,(x+1)}\end{aligned}$$

Com $c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Deseja-se resolver a equação*

$$x\frac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$$

Reescrevendo esta equação, tem-se

$$\left(-2xe^x + y - 6x^2\right)dx + xdy = 0$$

Considerando

$$P(x,y) = -2xe^x + y - 6x^2$$
$$Q(x,y) = x$$

tem-se que

$$Q_x - Py = 1 - 1 = 0$$

Ou seja, a equação dada é exata. Portanto existe uma função $\varphi(x,y)$ *tal que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = P & (1) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = Q & (2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = -2xe^x + y - 6x^2 & (3) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = x & (4) \end{cases}$$

Integrando (4) em relação a y *obtem-se*

$$\varphi(x,y) = xy + k(x) \tag{5}$$

e derivando (5) em relação a x,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = y + k'(x) \tag{6}$$

Igualando as equações (6) e (3) resulta em

$$k'(x) = -2xe^x - 6x^2$$

ou seja,

$$\begin{aligned} k(x) &= \int \left(-2xe^x - 6x^2\right) dx \\ &= -2(x-1)e^x - 2x^3 + c_0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= xy + k(x) \\ &= xy - 2(x-1)e^x - 2x^3 + c_0 \end{aligned}$$

e a solução da ***edo*** *é dada por*

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= c_1 && \Rightarrow \\ xy - 2(x-1)e^x - 2x^3 + c_0 &= c_1 && \Rightarrow \\ xy - 2(x-1)e^x - 2x^3 &= c_1 - c_0 && \Rightarrow \\ xy - 2(x-1)e^x - 2x^3 &= c_2 && \Rightarrow \end{aligned}$$

com $c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 4 *Para resolver a equação*

$$\left(1 + \frac{2}{y}\operatorname{sen} x\right) dy + \cos x \, dx = 0 \tag{7}$$

considere

$$P(x,y) = \cos x$$

$$Q(x,y) = 1 + \frac{2}{y}\operatorname{sen} x$$

e observe que

$$Q_x - P_y = \frac{2}{y}\cos x - 0 \neq 0$$

Ou seja, a ***edo*** *em questão não é exata. Porém, perceba que*

$$\frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{\frac{2}{y}\cos x}{\cos x} = \frac{2}{y}$$

O que significa que esta equação diferencial pode ser transformada numa ***edo*** *exata equivalente. Para isto, considere*

$$\begin{aligned} \mu(y) &= e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P} dy} \\ &= e^{\int \frac{2}{y} dy} \\ &= e^{2\ln|y| + c_0} \\ &= e^{c_0} y^2 \\ &= c_1 y^2 \end{aligned}$$

Tomando $c_1 = 1$ *e multiplicando ambos os lados da equação (7) por* $\mu(y)$ *tem-se*

$$y^2 \cos x \, dx + y^2 \left(1 + \frac{2}{y}\operatorname{sen} x\right) dy = 0$$

que é exata. Assim, existe uma função $\varphi(x,y)$ *tal que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = y^2 \cos x & (8) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = y^2 + 2y\operatorname{sen} x & (9) \end{cases}$$

Integrando (8) e relação a x, *tem-se*

$$\varphi(x,y) = y^2 \operatorname{sen} x + k(y) \tag{10}$$

e derivando (10) em relação a y *resulta em*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2y\operatorname{sen} x + k'(y) \tag{11}$$

Igualando as equações (11) e (9) tem-se

$$k'(y) = y^2$$

ou seja,

$$\begin{aligned} k(y) &= \int y^2 dy \\ &= \frac{y^3}{3} + c_0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= y^2 \operatorname{sen} x + k(y) \\ &= y^2 \operatorname{sen} x + \frac{y^3}{3} + c_0 \end{aligned}$$

e a solução da ***edo*** *é dada por*

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= c_1 && \Rightarrow \\ y^2 \operatorname{sen} x + \frac{y^3}{3} + c_0 &= c_1 && \Rightarrow \\ y^2 \operatorname{sen} x + \frac{y^3}{3} &= c_1 - c_0 && \Rightarrow \\ y^2 \operatorname{sen} x + \frac{y^3}{3} &= c_2 && \Rightarrow \end{aligned}$$

com $c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Para resolver a* ***edo***

$$\frac{dy}{dx} = y\left(xy^3 - 1\right),$$

observe que esta equaçãopode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= xy^4 - y && \Leftrightarrow \\ y' + y &= xy^4 && \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$y^{-4}y' + y^{-3} = x$$

Considere

$$u = y^{-3}$$

e observe que

$$u' = -3y^{-4}y'$$

Assim, segue-se que

$$\begin{aligned} y^{-4}y' + y^{-3} &= x && \Leftrightarrow \\ -\frac{u'}{3} + u &= x && \Leftrightarrow \\ u' - 3u &= -3x \end{aligned}$$

Ou seja, a ***edo*** *resultante é linear cujo fator integrante é dado por*

$$\mu(x) = e^{\int -3dx} = e^{-3x + c_0}$$

Tomando $c_0 = 0$ *e multiplicando ambos os lados da* ***edo*** *em* u *tem-se*

$$\begin{aligned} e^{-3x}u' - 3e^{-3x}u &= 3xe^{-3x} && \Leftrightarrow \\ \tfrac{d}{dx}\left(ue^{-3x}\right) &= 3xe^{-3x} && \Leftrightarrow \\ ue^{-3x} &= \int 3xe^{-3x} dx && \Leftrightarrow \\ ue^{-3x} &= -\tfrac{1}{3}e^{-3x}(3x+1) + c_1 && \Leftrightarrow \\ u(x) &= -\tfrac{1}{3}(3x+1) + c_1 e^{3x} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} u &= y^{-3} && \Leftrightarrow \\ u &= \frac{1}{y^3} && \Leftrightarrow \\ y^3 &= \tfrac{1}{u} && \Leftrightarrow \\ y(x) &= u^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

ou seja

$$y(x) = \left[-\frac{1}{3}(3x+1) + c_1 e^{3x}\right]^{-\frac{1}{3}}$$

com $c_1 \in \mathbb{R}$. ■