Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito Prova Final **2016**
Data: Quarta-feira, 24 de Maio de 2017 **Turma TX**

Exercício 1 *Para resolver a equação*

$$(3x^2+y)dx+(x^2y-x)dy=0$$

Inicialmente considere

$$M(x,y)=3x^2+y$$

$$N(x,y)=x^2y-x$$

e observe que

$$\begin{aligned}\frac{M_y-N_x}{N}&=\frac{1-2xy+1}{x^2y-x}\\&=\frac{2-2xy}{x^2y-x}\\&=\frac{2(1-xy)}{-x(1-xy)}\\&=-\frac{2}{x}\end{aligned}$$

depende apenas da variável x, ou seja, o fator integrante

$$\begin{aligned}\mu(x)&=e^{\int -\frac{2}{x}dx}\\&=e^{-2\ln|x|}\\&=e^{\ln|x|^{-2}}\\&=\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

transforma a equação dada, através da multiplicação por $\mu(x)$ em ambos os lados, numa equação equivalente que é exata:

$$\mu(x)\left[(3x^2+y)dx+(x^2y-x)dy\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x^2}\left[(3x^2+y)dx+(x^2y-x)dy\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\left(3+\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(y-\frac{1}{x}\right)dy=0$$

*Assim, as soluções da **edo** em questão obedece a equação*

$$\varphi(x,y)=c_1$$

Onde

$$\nabla\varphi(x,y)=\left(3+\frac{y}{x^2},y-\frac{1}{x}\right)$$

Em outras palavras,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=3+\dfrac{y}{x^2}\\[2mm]\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=y-\dfrac{1}{x}\end{cases}$$

Resolvendo-se este sistema, encontra-se

$$\varphi(x,y)=\frac{y^2}{2}-\frac{y}{x}+3x+c_2,\ c_2\in\mathbb{R}$$

Então, as soluções da equação, dadas de forma implícita, são

$$\begin{aligned}\frac{y^2}{2}-\frac{y}{x}+3x+c_2&=c_1 &&\Leftrightarrow\\\frac{y^2}{2}-\frac{y}{x}+3x&=c_2-c_1 &&\Leftrightarrow\\\frac{y^2}{2}-\frac{y}{x}+3x&=c,\ c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Para resolver a **edo***

$$(y+\sqrt{xy})\,dx=xdy,$$

observe que

$$\begin{aligned}\left(y+\sqrt{xy}\right)dx&=xdy &&\Leftrightarrow\\\left(\frac{y+\sqrt{xy}}{x}\right)dx&=dy &&\Leftrightarrow\\\left(\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{xy}}{x}\right)dx&=dy &&\Leftrightarrow\\\left(\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{xy}{x^2}}\right)dx&=dy &&\Leftrightarrow\\\left(\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dx&=dy.\end{aligned}$$

Considere

$$u=\frac{y}{x}$$

Ou seja

$$y=ux$$

e

$$dy = xdu + udx.$$

Substituindo na ***edo*** *dada tem-se*

$$\begin{aligned}
(u+\sqrt{u})\,dx &= xdu + udx && \Leftrightarrow\\
(u+\sqrt{u}-u)\,dx &= xdu && \Leftrightarrow\\
\sqrt{u}dx &= xdu && \Leftrightarrow\\
\frac{dx}{x} &= \frac{du}{\sqrt{u}} && \Leftrightarrow\\
\int \frac{dx}{x} &= \int \frac{du}{\sqrt{u}} && \Leftrightarrow\\
\ln|x| + c_1 &= 2\sqrt{u} && \Leftrightarrow\\
\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{c_1}{2} &= \sqrt{u} && \Leftrightarrow\\
u &= \left(\ln\sqrt{x} + c_2\right)^2
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
y(x) &= u(x)x\\
&= x\left(\ln\sqrt{x} + c_2\right)^2
\end{aligned}$$

com $c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Observe que a equação dada*

$$xy'' - 4y' = x^4$$

é uma equação de Euler, uma vez que pode ser reescrita como

$$x^2y'' - 4xy' + 0y = x^5$$

através de uma multiplicação por x *em ambos os lados da mesma. Assim, para solução da equação homogênea correspondente, considere como proposta de solução a função*

$$y(x) = x^m$$

e observe que

$$\begin{aligned}
y'(x) &= mx^{m-1}\\
y''(x) &= m(m-1)x^{m-2}
\end{aligned}$$

Substituindo na equação dada, tem-se

$$\begin{aligned}
x\left[m(m-1)x^{m-2}\right] - 4mx^{m-1} &= 0 \Leftrightarrow\\
m(m-1)x^{m-1} - 4mx^{m-1} &= 0 \Leftrightarrow\\
\left(m^2 - 5m\right)x^{m-1} &= 0 \Leftrightarrow\\
m^2 - 5m &= 0
\end{aligned}$$

Donde segue-se que

$$m = 5 \text{ ou } m = 0$$

ou seja

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= x^0 = 1\\
y_2(x) &= x^5
\end{aligned}$$

Usando o método da variação dos parâmetros para encontrar uma solução particular da equação não homogênea, tem-se

$$\begin{aligned}
W(1, e^x) &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 1 & x^5 \\ 0 & 5x^4 \end{bmatrix}\\
&= 5x^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_1 &= \begin{bmatrix} 0 & x^5 \\ g(x) & 5x^4 \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 1 & x^5 \\ x^3 & 5x^4 \end{bmatrix}\\
&= -x^8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_2 &= \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^3 \end{bmatrix}\\
&= x^3
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
u_1'(x) &= \frac{W_1}{W} = \frac{-x^8}{5x^4} = -\frac{x^4}{5}\\
u_2'(x) &= \frac{W_2}{W} = \frac{x^3}{5x^4} = \frac{1}{5x}
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= -\frac{1}{5}\int x^4 dx\\
&= -\frac{x^5}{25} + c_3
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
u_2(x) &= \frac{1}{5}\int \frac{1}{x}\,dx\\
&= \frac{1}{5}\ln x + c_4
\end{aligned}$$

Considerando $c_3 = c_4 = 0$, uma solução particular da edo é dada por

$$y_p(x) = y_1(x)u_1(x) + y_2(x)u_2(x)$$

$$= -\frac{x^5}{25} + \frac{x^5}{5}\ln x$$

Logo, a solução geral da equação dada é:

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x)$$

$$= c_1 + c_2x^5 + -\frac{x^5}{25} + \frac{x^5}{5}\ln x$$

$$= \frac{x^5}{5}\ln x + c_5x^5 + c_1$$

$\blacksquare$

Exercício 4 *Observe que a equação diferencial*

$$3xy'' + (2-x)y' - y = 0$$

possui um ponto singular regular em $x = 0$. Assim suponha que sua solução seja dada por

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

sendo $r \in \mathbb{R}_+$. Disto segue-se que

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}$$

e substituindo na equação tem-se

$$3x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2} + (2-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)a_nx^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^r\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(3n+3r-1)a_nx^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)a_nx^n\right\} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+1+r)(3n+2+3r)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)a_nx^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$r\,(3r-1)\,a_0x^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)\left[(3n+2+3r)a_{n+1} - a_n\right]x^n = 0$$

Segue-se disto que

$$r\,(3r-1) = 0 \Rightarrow r = 0 \,ou\, r = \frac{1}{3}$$

e

$$a_{n+1} = \frac{(n+r+1)a_n}{(n+1+r)(3n+2+3r)} = \frac{a_n}{3n+2+3r}$$

Quando $r = 0$, tem-se

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{3n+2}$$

e

$$a_0 \in \mathbb{R}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}a_0$$

$$a_2 = \frac{1}{10}a_0$$

$$a_3 = \frac{1}{80}a_0$$

$$a_4 = \frac{1}{880}a_0$$

Ou seja

$$y_1(x) = \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{80}x^3 + \frac{1}{880}x^4 + \cdots\right)x^0 = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{80}x^3 + \frac{1}{880}x^4 + \cdots$$

Quando $r = \frac{1}{3}$, tem-se

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{3(n+1)}$$

e

$$a_0 \in \mathbb{R}$$

$$a_1 = \frac{1}{3}a_0$$

$$a_2 = \frac{1}{18}a_0$$

$$a_3 = \frac{1}{162}a_0$$

$$a_4 = \frac{1}{1944}a_0$$

Ou seja

$$y_2(x) = \left(1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{162}x^3 + \frac{1}{1944}x^4 + \cdots\right)x^{\frac{1}{3}}$$
$$= x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{18}x^{\frac{7}{3}} + \frac{1}{162}x^{\frac{10}{3}} + \frac{1}{1944}x^{\frac{13}{3}} + \cdots$$

■

Exercício 5 *Aplicando a **transformada de Laplace** em ambos os lados da equação dada, tem-se*

$$\mathcal{L}\{y'' - 4y'\} = \mathcal{L}\left\{6e^{3t} - 3e^{-t}\right\} \qquad \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\{y''\} - 4\mathcal{L}\{y'\} = 6\mathcal{L}\{e^{3t}\} - 3\mathcal{L}\{e^{-t}\} \qquad \Rightarrow$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4\left[sY(s) - y(0)\right] =$$

$$= \frac{6}{s-3} - \frac{3}{s+1}$$

Sabe-se que

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = -1$$

Logo

$$s^2Y(s) - s + 1 - 4sY(s) + 4 = \frac{6}{s-3} - \frac{3}{s+1} \Rightarrow$$

$$\left(s^2 - 4s\right)Y(s) - s + 5 = \frac{6}{s-3} - \frac{3}{s+1} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{s^3 - 7s^2 + 10s + 30}{s\,(s-4)\,(s-3)(s+1)}$$

*Decompondo esta expressão em **frações parciais**, tem-se que*

$$Y(s) = \frac{5}{2s} + \frac{11}{10\,(s-4)} - \frac{2}{s-3} - \frac{3}{5\,(s+1)}$$

*e usando a **transforma de Laplace inversa**, obtem-se*

$$y(t) = \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} + \frac{11}{10}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-4}\} - 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-3}\} -$$
$$- \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\}$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{11}{10}e^{4t} - 2e^{3t} - \frac{3}{5}e^{-t}$$

■