Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 3ª Prova **2016**
Data: Quarta-feira, 24 de Maio **Turma TX**

Exercício 1

a). *Observe que*

$$\begin{aligned} a_n &= 3^{-n}(4x-5)^n \\ &= \frac{(4x-5)^n}{3^n} \\ &= \left(\frac{4x-5}{3}\right)^n \end{aligned}$$

Perceba que

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|a_n|} &= \sqrt[n]{\left|\left(\frac{4x-5}{3}\right)^n\right|} \\ &= \left|\frac{4x-5}{3}\right| \end{aligned}$$

*Segundo o **teste da raíz** a série será absolutamente convergente quando*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

Ou seja,

$$\left|\frac{4x-5}{3}\right| < 1 \Leftrightarrow$$

$$|4x-5| < 3 \Leftrightarrow$$

$$\left|4\left(x-\frac{5}{4}\right)\right| < 3 \Leftrightarrow$$

$$\left|x-\frac{5}{4}\right| < \frac{3}{4}$$

Portanto, a série é covergente no intervalo

$$-\frac{3}{4} < x - \frac{5}{4} < \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 2$$

com raio de convergência $r = \dfrac{3}{4}$. □

b). *Observe que*

$$a_n = \frac{(3x-1)^n}{n(n+1)}$$

e

$$a_{n+1} = \frac{(3x-1)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$$

Perceba que

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(3x-1)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\frac{n(n+1)}{(3x-1)^n} \\ &= \frac{n}{n+2}(3x-1) \end{aligned}$$

*Segundo o **teste da razão** a série será absolutamente convergente quando*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

Ou seja,

$$|3x-1| < 1 \Leftrightarrow$$

$$\left|3\left(x-\frac{1}{3}\right)\right| < 1 \Leftrightarrow$$

$$\left|x-\frac{1}{3}\right| < \frac{1}{3}$$

Portanto, a série é covergente no intervalo

$$-\frac{1}{3} < x - \frac{1}{3} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{2}{3}$$

com raio de convergência $r = \dfrac{1}{3}$. ■

Exercício 2 *Da **série geométrica** (também conhecida por **progressão geométrica**), sabe-se que*

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \end{aligned}$$

para $|x| < 1$.

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2+x} &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

Trocando x por $\frac{-x}{2}$ na série geométrica, tem-se que

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} &= 1-\frac{x}{2}+\left(\frac{-x}{2}\right)^2+\left(\frac{-x}{2}\right)^3+\cdots\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+x} &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

desde que $\left|\frac{x}{2}\right|<1$, *ou seja* $|x|<2$. ■

Exercício 3 *Suponha que*

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

Então

$$\begin{aligned}y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}\\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}\end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial

$$(x^2+2)y''+3xy'-y=0$$

tem-se

$$(x^2+2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}+ +3x\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^n+\sum_{n=2}^{\infty}2n(n-1)a_n x^{n-2}+ +\sum_{n=1}^{\infty}3na_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+ \sum_{n=1}^{\infty}3na_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0 \Rightarrow$$

$$4a_2-a_0+(12a_3+2a_1)x+ +\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n^2+2n-1)a_n+2(n+2)(n+1)a_{n+2}\right]x^n=0$$

Assim,

$$\begin{aligned}4a_2-a_0&=0\\ 12a_3+2a_1&=0\\ (n^2+2n-1)a_n+2(n+2)(n+1)a_{n+2}&=0\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}a_2&=\frac{a_0}{4}\\ a_3&=-\frac{a_1}{6}\\ a_{n+2}&=-\frac{(n^2+2n-1)}{2(n+2)(n+1)}a_n\end{aligned}$$

onde $a_0, a_1\in\mathbb{R}$. *Deduzindo alguns termos da solução*

$$\begin{aligned}a_4&=-\frac{7}{96}a_0; & a_5&=\frac{7}{120}a_1;\\ a_6&=-\frac{161}{5760}a_0; & a_7&=\frac{17}{720}a_1;\\ a_8&=-\frac{1081}{92\,160}a_0; & a_9&=\frac{527}{51\,840}a_1\end{aligned}$$

Portanto a solução geral da equação diferencial é dada por

$$y_c(x)=-a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$$

Sendo

$$y_1(x)=1+\frac{1}{4}x^2+\frac{7}{96}x^4+\frac{161}{5760}x^6+\frac{1081}{92\,160}x^8+\cdots$$

$$y_2(x)=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{7}{120}x^5+\frac{17}{720}x^7+\frac{527}{51\,840}x^9+\cdots$$

■

Exercício 4 *Observe que a equação diferencial*

$$3xy''+(2-x)y'-y=0$$

possui um ponto singular regular em $x=0$. Assim suponha que sua solução seja dada por

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}$$

sendo $r\in\mathbb{R}_+$. Disto segue-se que

$$\begin{aligned}y'(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}\\ y''(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}\end{aligned}$$

e substituindo na equação tem-se

$$3x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}+$$
$$(2-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-1}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)a_nx^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}-$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0 \quad \Rightarrow$$

$$x^r\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(3n+3r-1)a_nx^{n-1}-\right.$$
$$\left.\sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)a_nx^{n}\right\}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+1+r)(3n+2+3r)a_{n+1}x^{n}-$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)a_nx^{n}=0 \quad \Rightarrow$$

$$r\,(3r-1)\,a_0x^{-1}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)\left[(3n+2+3r)a_{n+1}-a_n\right]x^n=0$$

Segue-se disto que

$$r\,(3r-1)=0 \Rightarrow r=0\,ou\,r=\frac{1}{3}$$

e

$$a_{n+1}=\frac{(n+r+1)a_n}{(n+1+r)(3n+2+3r)}$$
$$=\frac{a_n}{3n+2+3r}$$

Quando $r=0$*, tem-se*

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{3n+2}$$

e

$$a_0\in\mathbb{R}$$
$$a_1=\frac{1}{2}a_0$$
$$a_2=\frac{1}{10}a_0$$
$$a_3=\frac{1}{80}a_0$$
$$a_4=\frac{1}{880}a_0$$

Ou seja

$$y_1(x)=\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{80}x^3+\frac{1}{880}x^4+\cdots\right)x^0$$
$$=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{80}x^3+\frac{1}{880}x^4+\cdots$$

Quando $r=\frac{1}{3}$*, tem-se*

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{3(n+1)}$$

e

$$a_0\in\mathbb{R}$$
$$a_1=\frac{1}{3}a_0$$
$$a_2=\frac{1}{18}a_0$$
$$a_3=\frac{1}{162}a_0$$
$$a_4=\frac{1}{1944}a_0$$

Ou seja

$$y_2(x)=\left(1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{18}x^2+\frac{1}{162}x^3+\frac{1}{1944}x^4+\cdots\right)x^{\frac{1}{3}}$$
$$=x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}x^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{18}x^{\frac{7}{3}}+\frac{1}{162}x^{\frac{10}{3}}+\frac{1}{1944}x^{\frac{13}{3}}+\cdots$$

■

Exercício 5 *Aplicando a* ***transformada de Laplace*** *em ambos os lados da equação dada, tem-se*

$$\mathcal{L}\left\{y''-4y'\right\}=\mathcal{L}\left\{6e^{3t}-3e^{-t}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\{y''\}-4\mathcal{L}\{y'\}=6\mathcal{L}\{e^{3t}\}-3\mathcal{L}\{e^{-t}\} \quad \Rightarrow$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-4\left[sY(s)-y(0)\right]=$$
$$=\frac{6}{s-3}-\frac{3}{s+1}$$

Sabe-se que

$$y(0)=1$$
$$y'(0)=-1$$

Logo

$$s^2Y(s)-s+1-4sY(s)+4=\frac{6}{s-3}-\frac{3}{s+1} \Rightarrow$$

$$\left(s^2-4s\right)Y(s)-s+5=\frac{6}{s-3}-\frac{3}{s+1} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{s^3 - 7s^2 + 10s + 30}{s\,(s-4)\,(s-3)(s+1)}$$

*Decompondo esta expressão em **frações parciais**, tem-se que*

$$Y(s) = \frac{5}{2s} + \frac{11}{10\,(s-4)} - \frac{2}{s-3} - \frac{3}{5\,(s+1)}$$

*e usando a **transforma de Laplace inversa**, obtem-se*

$$y(t) = \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} + \frac{11}{10}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-4}\} - 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-3}\} - \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\}$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{11}{10}e^{4t} - 2e^{3t} - \frac{3}{5}e^{-t}$$

■