Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 2ª Prova **2016**
Data: Terça-feira, 04 de Abril de 2017 **Turma TX**

Exercício 1 *Sabe-se que $y_1(t) = t$ é uma solução da equação diferencial*

$$(1-t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0$$

Observe inicialmente que

$$1 - t^2 \neq 0 \Rightarrow t \neq \pm 1$$

Supondo que esta equação seja parte de um problema com valor inicial $t = 0$, segue-se que

$$-1 < t < 1$$

é o maior intervalo contendo $t_0 = 0$ (Para outros casos, as devidas considerações devem ser feitas).

*Usando a **redução de ordem**, considere*

$$\begin{aligned} y_2(t) &= u(t)y_1(t) \\ &= u(t)t \end{aligned}$$

Assim, tem-se

$$y_2'(t) = tu'(t) + u(t)$$

$$\begin{aligned} y_2''(t) &= u'(t) + tu''(t) + u'(t) \\ &= 2u'(t) + tu''(t) \end{aligned}$$

Como deseja-se que $y_2(t)$ seja também uma solução da equação diferencial dada, segue-se que

$$(1-t^2)y_2'' - 2ty_2' + 2y_2 = 0,$$

ou seja

$$\left(t - t^3\right)u''(t) + \left(2 - 4t^2\right)u'(t) = 0 \qquad (1)$$

Considere

$$\omega(t) = u'(t).$$

Disto segue-se que

$$\omega'(t) = u''(t)$$

e a equação (1) torna-se

$$\left(1 - t^2\right)t\omega'(t) + 2\left(1 - 2t^2\right)\omega(t) = 0$$

*Usando **separação de variáveis**, tem-se*

$$\begin{aligned} \left(1-t^2\right)t\omega'(t) &= -2\left(1-2t^2\right)\omega(t) && \Rightarrow \\ \frac{\omega'(t)}{\omega(t)} &= \frac{-2\left(1-2t^2\right)}{\left(1-t^2\right)t} && \Rightarrow \\ \int \frac{\omega'(t)}{\omega(t)}dt &= -2\int \frac{1-2t^2}{\left(1-t^2\right)t}dt \end{aligned}$$

*Usando **frações parciais**, perceba que*

$$\begin{aligned} \frac{1-2t^2}{\left(1-t^2\right)t} &= \frac{1}{t} - \frac{1}{2\left(1-t\right)} + \frac{1}{2\left(1+t\right)} \\ &= \frac{1}{t} - \frac{t}{1-t^2} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \int \frac{\omega'(t)}{\omega(t)}dt &= -2\int\left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1-t^2}\right)dt && \Rightarrow \\ \ln|\omega(t)| &= -2\ln|t| - \ln\left|1-t^2\right| + c_1 && \Rightarrow \\ \omega(t) &= \pm e^{-2\ln|t|}e^{-\ln\left|1-t^2\right|}e^{c_1} && \Rightarrow \\ \omega(t) &= c_2\,|t|^{-2}\left|1-t^2\right|^{-1} && \Rightarrow \\ \omega(t) &= \frac{c_2}{t^2\left|1-t^2\right|},\ c_2 = \pm e^{c_1} \end{aligned}$$

Como $-1 < t < 1$, segue-se que

$$\begin{aligned} 1 + t > 0 &\Rightarrow |1+t| = 1+t \\ 1 - t > 0 &\Rightarrow |1-t| = 1-t \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left|1-t^2\right| &= |1+t|\,|1-t| \\ &= (1+t)(1-t) \\ &= 1 - t^2 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \frac{c_2}{t^2(1-t^2)} && \Rightarrow \\ u'(t) &= \frac{c_2}{t^2\left(1-t^2\right)} && \Rightarrow \\ u(t) &= c_2\int\frac{dt}{t^2\left(1-t^2\right)} && \Rightarrow \end{aligned}$$

Observe que

$$\frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} u(t) &= c_2 \int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} \\ &= c_2 \left[\int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dt}{2(1-t)} + \int \frac{dt}{2(1+t)} \right] \\ &= c_2 \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln|1-t| + \frac{1}{2} \ln|1+t| + c_3 \right) \end{aligned}$$

Tomando $c_3 = 0$ e $c_2 = 1$, uma possível escolha para a função $u(t)$ seria

$$u(t) = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln(1-t) + \frac{1}{2}\ln(1+t)$$

e

$$\begin{aligned} y_2(t) &= t\,u(t) \\ &= -1 + \frac{t}{2}\ln(1-t) + \frac{t}{2}\ln(1+t) \\ &= -1 + \frac{t}{2}\ln(1-t^2) \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Usando o método dos* ***coeficientes a determinar****, considere a seguinte proposta de solução*

$$y(t) = Ate^{\alpha t} + Be^{\alpha t}$$

Observe que

$$\begin{aligned} y'(t) &= A\left(e^{\alpha t} + \alpha t e^{\alpha t}\right) + B\alpha e^{\alpha t} \\ y''(t) &= A\left(\alpha e^{\alpha t} + \alpha e^{\alpha t} + \alpha^2 t e^{\alpha t}\right) + B\alpha^2 e^{\alpha t} \end{aligned}$$

Substituindo na equação dada, teremos

$$\begin{aligned} &\left[\left(\alpha^2 A + 4\alpha A + 4A\right) t + 2\alpha A + B\alpha^2 + \right. \\ &\qquad \left. + 4A + 4B\alpha + 4B\right] e^{\alpha t} = te^{\alpha t} \end{aligned}$$

Ou seja

$$\left\{ \begin{array}{r} (\alpha+2)^2 A = 1 \\ 2(\alpha+2)A + (\alpha+2)^2 B = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{(\alpha+2)^2}, \ \alpha \neq -2 \\ B &= \frac{-2}{(\alpha+2)^3} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$y(t) = \frac{te^{\alpha t}}{(\alpha+2)^2} - \frac{2e^{\alpha t}}{(\alpha+2)^3}, \ \alpha \neq -2$$

Quando $\alpha = 2$, tem-se a seguinte equação diferencial

$$y'' + 4y' + 4y = te^{-2t},$$

cujas soluções da parte homogênea são

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{-2t} \\ y_2(t) &= te^{-2t} \end{aligned}$$

Assim, perceba que

$$\begin{aligned} W &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ -2e^{-2t} & (1-2t)e^{-2t} \end{bmatrix} \\ &= e^{-4t} \end{aligned}$$

Além disso

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{bmatrix} 0 & te^{-2t} \\ te^{-2t} & (1-2t)e^{-2t} \end{bmatrix} \\ &= t^2 e^{-4t} \\ W_2 &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ -2e^{-2t} & te^{-2t} \end{bmatrix} \\ &= te^{-4t} \end{aligned}$$

Logo, pelo ***método da variação dos parâmetros****,*

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} = t^2 \Rightarrow u_1(t) = \frac{t^3}{3} + c_1 \\ u_2' &= \frac{W_2}{W} = t \Rightarrow u_2(t) = \frac{t^2}{2} + c_2 \end{aligned}$$

e, tomando $c_1 = c_2 = 0$, uma solução paraticular da equação é dada por

$$\begin{aligned} y_p(t) &= y_1(t)u_1(t) + y_2(t)u_2(t) \\ &= e^{-2t}\frac{t^3}{3} + te^{-2t}\frac{t^2}{2} \\ &= \frac{5}{6}t^3 e^{-2t} \end{aligned}$$

■

Exercício 3

a). *Resolvendo a equação homogênea correspondente à equação dada, ou seja*

$$y'' + y = 0$$

Tem-se como equação auxiliar

$$k^2 + 1 = 0,$$

*cujas soluções são $k = \pm i$ e donde segue-se que as soluções da **edo** são construídas a partir das funções*

$$y_1(x) = \cos x$$
$$y_2(x) = \operatorname{sen} x$$

Usando-se o método da variaçãodos parâmetros para encontrar uma solução particular da equação não homogênea, tem-se

$$W(1, e^x) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$$

$$= 1$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ & \\ \operatorname{tg} x & \cos x \end{bmatrix}$$

$$= -\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \operatorname{tg} x \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{tg} x \cos x$$

Portanto,

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W} = -\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x$$

$$u_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \operatorname{tg} x \cos x$$

e assim,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \int -\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x \, dx \\ &= -\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} dx \\ &= -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx \\ &= -\int \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x \right) dx \\ &= -\int \sec x \, dx + \int \cos x \, dx \\ &= -\ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + \operatorname{sen} x + c_3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \int \operatorname{tg} x \cos x \, dx \\ &= \int \operatorname{sen} x \, dx \\ &= -\cos x + c_4 \end{aligned}$$

Considerando $c_3 = c_4 = 0$, uma solução particular da edo é dada por

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_1(x)u_1(x) + y_2(x)u_2(x) \\ &= \cos x \left[-\ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + \operatorname{sen} x \right] - \\ &\quad - \operatorname{sen} x \cos x \\ &= \cos x \left[-\ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \right] \\ &= -\cos x \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| \end{aligned}$$

Logo, a solução geral da equação dada é:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x) \\ &= c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \cos x \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| \end{aligned}$$

□

b). *A equação homogênea correspondente à equação dada é a mesma do item (a), ou seja,*

$$y_1(x) = \cos x$$
$$y_2(x) = \operatorname{sen} x$$

*e usando novamente o **método da variação dos parâmetros** para encontrar uma solução particular* *da equação não homogênea, tem-se*

$$W(1, e^x) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$$

$$= 1$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \sec^2 x & \cos x \end{bmatrix}$$

$$= -\sec^2 x \operatorname{sen} x$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \sec^2 x \end{bmatrix}$$

$$= \sec^2 x \cos x$$

Portanto

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W} = -\sec^2 x \operatorname{sen} x$$

$$u_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \sec^2 x \cos x$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\int \sec^2 x \operatorname{sen} x \, dx \\ &= -\int \frac{\operatorname{sen} x \, dx}{\cos^2 x} \\ &= -\frac{1}{\cos x} + c_3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \int \sec^2 x \cos x \, dx \\ &= \int \frac{dx}{\cos x} \\ &= \int \sec x \, dx \\ &= \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c_4 \end{aligned}$$

Considerando $c_3 = c_4 = 0$, *uma solução particular da edo é dada por*

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_1(x)u_1(x) + y_2(x)u_2(x) \\ &= \cos x \left(-\frac{1}{\cos x}\right) + \operatorname{sen} x \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| \\ &= \operatorname{sen} x \, \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| - 1 \end{aligned}$$

Logo, a solução geral da equação dada é:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x) \\ &= c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \, \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| - 1 \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Observe que a equação dada*

$$xy'' - 4y' = x^4$$

é uma equação de Euler, uma vez que pode ser reescrita como

$$x^2 y'' - 4xy' + 0y = x^5$$

através de uma multiplicação por x *em ambos os lados da mesma. Assim, para solução da equação homogênea correspondente, considere como proposta de solução a função*

$$y(x) = x^m$$

e observe que

$$\begin{aligned} y'(x) &= mx^{m-1} \\ y''(x) &= m(m-1)x^{m-2} \end{aligned}$$

Substituindo na equação dada, tem-se

$$\begin{aligned} x\left[m(m-1)x^{m-2}\right] - 4mx^{m-1} &= 0 \Leftrightarrow \\ m(m-1)x^{m-1} - 4mx^{m-1} &= 0 \Leftrightarrow \\ \left(m^2 - 5m\right)x^{m-1} &= 0 \Leftrightarrow \\ m^2 - 5m &= 0 \end{aligned}$$

Donde segue-se que

$$m = 5 \text{ ou } m = 0$$

ou seja

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^0 = 1 \\ y_2(x) &= x^5 \end{aligned}$$

Usando o método da variāção dos parâmetros para encontrar uma solução particular da equação não homogênea, tem-se

$$W(1,e^x) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x^5 \\ 0 & 5x^4 \end{bmatrix}$$

$$= 5x^4$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & x^5 \\ g(x) & 5x^4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x^5 \\ x^3 & 5x^4 \end{bmatrix}$$

$$= -x^8$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^3 \end{bmatrix}$$

$$= x^3$$

Portanto

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W} = \frac{-x^8}{5x^4} = -\frac{x^4}{5}$$
$$u_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{x^3}{5x^4} = \frac{1}{5x}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\frac{1}{5}\int x^4 dx \\ &= -\frac{x^5}{25} + c_3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \frac{1}{5}\int \frac{1}{x}\, dx \\ &= \frac{1}{5}\ln x + c_4 \end{aligned}$$

Considerando $c_3 = c_4 = 0$, uma solução particular da edo é dada por

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_1(x)u_1(x) + y_2(x)u_2(x) \\ &= -\frac{x^5}{25} + \frac{x^5}{5}\ln x \end{aligned}$$

Logo, a solução geral da equação dada é:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x) \\ &= c_1 + c_2x^5 + -\frac{x^5}{25} + \frac{x^5}{5}\ln x \\ &= \frac{x^5}{5}\ln x + c_5x^5 + c_1 \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Considere como proposta de solução a função*

$$y(x) = (x+3)^m,$$

observe que

$$\begin{aligned} y'(x) &= m(x+3)^{m-1} \\ y''(x) &= m(m-1)(x+3)^{m-2} \end{aligned}$$

e substituindo na equação dada, tem-se

$$\begin{aligned} m(m-1)(x+3)^m - 8m(x+3)^m + 14(x+3)^m &= 0 \Leftrightarrow \\ [m(m-1) - 8m + 14]\,(x+3)^m &= 0 \Leftrightarrow \\ \left(m^2 - 9m + 14\right)(x+3)^m &= 0 \Leftrightarrow \\ m^2 - 9m + 14 &= 0 \end{aligned}$$

Donde segue-se que

$$m = 7 \text{ ou } m = 2$$

Ou seja

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (x+3)^2 \\ y_2(x) &= (x+3)^7 \end{aligned}$$

e a solução geral da equação dada é

$$y_c(x) = c_1(x+3)^2 + c_2(x+3)^7$$

sendo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■