Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito 1^{a} Prova **2016**
Data: Terça-feira, 21 de Março **Turma TX**

Exercício 1

a). *Deseja-se resolver o seguinte problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x^2\dfrac{dy}{dx} = y - xy \\ y(-1) = -1 \end{cases}$$

Para isto deve-se resolver inicialmente, a equação diferencial ordinária

$$x^2\frac{dy}{dx} = y - xy$$

Usando a separação de variáveis, observe que,

$$\begin{aligned}
x^2\frac{dy}{dx} &= y - xy && \Rightarrow \\
x^2 dy &= (1-x)ydx && \Rightarrow \\
\frac{dy}{y} &= \tfrac{(1-x)}{x^2}dx && \Rightarrow \\
\int\frac{dy}{y} &= \int\frac{(1-x)}{x^2}dx && \Rightarrow \\
\ln|y| &= \int\left(\tfrac{1}{x^2} - \tfrac{1}{x}\right)dx && \Rightarrow \\
\ln|y| &= -\tfrac{1}{x} - \ln|x| + c && \Rightarrow \\
|y| &= e^{-\frac{1}{x} - \ln|x| + c} && \Rightarrow \\
|y| &= \frac{e^{-\frac{1}{x}+c}}{|x|} && \Rightarrow \\
|y| &= \left|\frac{e^{-\frac{1}{x}+c}}{x}\right| && \Rightarrow \\
y &= \frac{e^{-\frac{1}{x}+c}}{x}
\end{aligned}$$

Usando agora a condição inicial dada, segue-se que

$$\begin{aligned}
y(-1) &= -1 && \Rightarrow \\
\frac{e^{1+c}}{-1} &= -1 && \Rightarrow \\
e^{1+c} &= 1 && \Rightarrow \\
1 + c &= 0 && \Rightarrow \\
c &= -1
\end{aligned}$$

Portanto, a solução do PVI dado é

$$y(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}-1}}{x}$$

□

b). *Deseja-se resolver a seguinte* ***edo***

$$\left(e^x + e^{-x}\right)\frac{dy}{dx} = y^2$$

Usando-se separação de variáveis observe que

$$\begin{aligned}
\left(e^x + e^{-x}\right)\frac{dy}{dx} &= y^2 && \Rightarrow \\
\left(e^x + e^{-x}\right)dy &= y^2 dx && \Rightarrow \\
\frac{dy}{y^2} &= \frac{dx}{e^x + e^{-x}} && \Rightarrow \\
\frac{dy}{y^2} &= \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx && \Rightarrow \\
\int\frac{dy}{y^2} &= \int\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx && \Rightarrow \\
-\frac{1}{y} &= \operatorname{arctg}\left(e^x\right) + c && \Rightarrow \\
y &= \frac{-1}{\operatorname{arctg}\left(e^x\right) + c}
\end{aligned}$$

onde $c \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 2 *Deseja-se determinar todas as soluções da* ***edo***

$$y' + 4xy = x^3 e^{x^2}$$

Observe que trata-se de uma ***edo*** *linear de 1^{a} ordem, cujo fator integrante é dado por*

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= e^{\int 4x dx} \\
&= e^{2x^2 + c_1}
\end{aligned}$$

Desta forma, considerando $c_1 = 0$, segue-se que

$$\begin{aligned}
[\mu(x)y(x)]' &= \mu'(x)y(x) + \mu(x)y'(x) \\
&= 4xe^{2x^2}y(x) + e^{2x^2}y'(x) \\
&= e^{2x^2}\left(4xy(x) + y'(x)\right)
\end{aligned}$$

Ou seja, multiplicando-se ambos os lados da ***edo*** *dada por $\mu(x)$, tem-se*

$$\begin{aligned} e^{2x^2}(4xy+y') &= e^{2x^2}x^3e^{x^2} && \Rightarrow \\ [\mu\, y]' &= x^3e^{3x^2} && \Rightarrow \\ \mu\, y &= \int x^3e^{3x^2}dx && \Rightarrow \\ \mu\, y &= e^{3x^2}\left(\tfrac{1}{6}x^2-\tfrac{1}{18}\right)+c_2 && \Rightarrow \\ y &= \frac{1}{\mu(x)}\left[e^{3x^2}\left(\tfrac{1}{6}x^2-\tfrac{1}{18}\right)+c_2\right] && \Rightarrow \\ y &= \frac{1}{e^{2x^2}}\left[e^{3x^2}\left(\tfrac{1}{6}x^2-\tfrac{1}{18}\right)+c_2\right] && \Rightarrow \\ y &= e^{x^2}\left(\tfrac{1}{6}x^2-\tfrac{1}{18}\right)+c_2e^{-2x^2} \end{aligned}$$

Com $c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3

a). *Para resolver a equação*

$$(x^2-y^2)dx+(x^2-2xy)dy=0$$

Inicialmente considere

$$\begin{aligned} M(x,y) &= x^2-y^2 \\ N(x,y) &= x^2-2xy \end{aligned}$$

e observe que

$$M(tx,ty)=t^2(x^2-y^2)=t^2M(x,y),$$

$$N(tx,ty)=t^2(x^2-2xy)=t^2N(x,y).$$

Ou seja, as funções M e N são homogêneas de grau 2. Assim, colocando y^2 em evidência, tem-se

$$\begin{aligned} y^2\left[\left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)dx+\left(\frac{x^2}{y^2}-2\frac{x}{y}\right)dy\right]=0 \Rightarrow \\ \left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)dx+\left(\frac{x^2}{y^2}-2\frac{x}{y}\right)dy=0 \qquad (1) \end{aligned}$$

Considere

$$\frac{x}{y}=u \Leftrightarrow x=uy$$

Segue-se disto, que

$$dx=ydu+udy$$

e, substituido-se em 1, tem-se

$$\begin{aligned} (u^2-1)(ydu+udy)+(u^2-2u)dy=0 && \Leftrightarrow \\ (u^2-1)ydu+\left(u^3+u^2-3u\right)dy=0 && \Leftrightarrow \\ \left(u^3+u^2-3u\right)dy=-(u^2-1)ydu && \Leftrightarrow \\ \frac{dy}{y}=\frac{1-u^2}{u^3+u^2-3u}du && \Leftrightarrow \\ \int\frac{dy}{y}=\int\frac{1-u^2}{u^3+u^2-3u}du && \Leftrightarrow \\ \ln|y|=\int\frac{1-u^2}{u^3+u^2-3u}du \end{aligned}$$

(Em virtude do grau de dificuldade de resolução desta última integral, este item do problema foi cancelado e o seu valor ***(1,0 ponto)*** *será computado a todos os alunos que participaram da prova.)* □

b). *Para resolver a equação*

$$(3x^2+y)dx+(x^2y-x)dy=0$$

Inicialmente considere

$$M(x,y)=3x^2+y$$

$$N(x,y)=x^2y-x$$

e observe que

$$\begin{aligned} \frac{M_y-N_x}{N} &= \frac{1-2xy+1}{x^2y-x} \\ &= \frac{2-2xy}{x^2y-x} \\ &= \frac{2(1-xy)}{-x(1-xy)} \\ &= -\frac{2}{x} \end{aligned}$$

depende apenas da variável x, ou seja, o fator integrante

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\int -\frac{2}{x}dx} \\ &= e^{-2\ln|x|} \\ &= e^{\ln|x|^{-2}} \\ &= \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

transforma a equação dada, através da multiplicação por $\mu(x)$ em ambos os lados, numa equação *equivalente que é exata:*

$$\mu(x)\left[(3x^2+y)dx+(x^2y-x)dy\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x^2}\left[(3x^2+y)dx+(x^2y-x)dy\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\left(3+\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(y-\frac{1}{x}\right)dy=0$$

Assim, as soluções da ***edo*** *em questão obedece a equação*

$$\varphi(x,y)=c_1$$

Onde

$$\nabla\varphi(x,y)=\left(3+\frac{y}{x^2},y-\frac{1}{x}\right)$$

Em outras palavras,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=3+\dfrac{y}{x^2}\\[2mm] \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=y-\dfrac{1}{x}\end{cases}$$

Resolvendo-se este sistema, encontra-se

$$\varphi(x,y)=\frac{y^2}{2}-\frac{y}{x}+3x+c_2,\ c_2\in\mathbb{R}$$

Então, as soluções da equação, dadas de forma implícita, são

$$\begin{aligned}\frac{y^2}{2}-\frac{y}{x}+3x+c_2&=c_1 &&\Leftrightarrow\\ \frac{y^2}{2}-\frac{y}{x}+3x&=c_2-c_1 &&\Leftrightarrow\\ \frac{y^2}{2}-\frac{y}{x}+3x&=c,\ c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Para resolver a equação*

$$(y+2)\,dx=(2x+y-4)\,dy$$

Considere a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases}Y=y+2\\ X=x-3\end{cases}$$

com

$$\begin{cases}dY=dx\\ dX=dy\end{cases}$$

Substituido na ***edo*** *dada tem-se*

$$Y\,dX=(2X+Y)\,dY\Leftrightarrow \tag{2}$$

$$dX=\left(2\frac{X}{Y}+1\right)dY$$

Tome

$$u=\frac{X}{Y}\Leftrightarrow X=uY$$

e observe que

$$dX=Y\,du+udY.$$

Convém observar que com esta escolha para a variável u, estar-se buscando soluções para a ***edo*** *dada tendo y como variável livre e x dependente de y, ou seja $x=x(y)$. Retornado à equação 2, tem-se*

$$\begin{aligned}Y\,du+udY&=(2u+1)\,dY &&\Leftrightarrow\\ Y\,du&=(u+1)\,dY &&\Leftrightarrow\\ \frac{du}{u+1}&=\frac{dY}{Y} &&\Leftrightarrow\\ \int\frac{du}{u+1}&=\int\frac{dY}{Y} &&\Leftrightarrow\\ \ln|u+1|&=\ln|Y|+c_1 &&\Leftrightarrow\\ u+1&=e^{\ln|Y|+c_1} &&\Leftrightarrow\\ u&=\pm e^{c_1}Y-1 &&\Leftrightarrow\\ u&=c_2Y-1\end{aligned}$$

Segue-se disto, que

$$\frac{X}{Y}=c_2Y-1\Rightarrow$$

$$X=c_2Y^2-Y$$

Retornando para as variáveis x e y, tem-se

$$x-3=c_2\,(y+2)^2-(y+2)\Rightarrow$$

$$x(y)=c_2\,(y+2)^2-y+1$$

com $c_2\in\mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Para resolver a* ***edo***

$$(y+\sqrt{xy})\,dx=xdy,$$

observe que

$$\begin{aligned}(y+\sqrt{xy})\,dx&=xdy &&\Leftrightarrow\\ \left(\frac{y+\sqrt{xy}}{x}\right)dx&=dy &&\Leftrightarrow\\ \left(\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{xy}}{x}\right)dx&=dy &&\Leftrightarrow\\ \left(\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{xy}{x^2}}\right)dx&=dy &&\Leftrightarrow\\ \left(\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dx&=dy.\end{aligned}$$

Considere
$$u = \frac{y}{x}$$
Ou seja
$$y = ux$$
e
$$dy = xdu + udx.$$
Substituindo na ***edo*** *dada tem-se*
$$\begin{aligned}
(u + \sqrt{u})\, dx &= xdu + udx & \Leftrightarrow \\
(u + \sqrt{u} - u)\, dx &= xdu & \Leftrightarrow \\
\sqrt{u}dx &= xdu & \Leftrightarrow \\
\frac{dx}{x} &= \frac{du}{\sqrt{u}} & \Leftrightarrow \\
\int \frac{dx}{x} &= \int \frac{du}{\sqrt{u}} & \Leftrightarrow \\
\ln|x| + c_1 &= 2\sqrt{u} & \Leftrightarrow \\
\tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{c_1}{2} &= \sqrt{u} & \Leftrightarrow \\
u &= \left(\ln\sqrt{x} + c_2\right)^2
\end{aligned}$$

Portanto,
$$\begin{aligned}
y(x) &= u(x)x \\
&= x\left(\ln\sqrt{x} + c_2\right)^2
\end{aligned}$$
com $c_2 \in \mathbb{R}$. ∎