Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma TX

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1ª Prova | **2º Semestre** | **2016**

Data: 13 de Fevereiro de 2017 | **Duração: 18:30 - 20:30**

Problema 1 *Resolvas as equações diferenciais:*

a). $x^2 \dfrac{dy}{dx} = y - xy$, $y(-1) = -1$;

b). $(e^x + e^{-x}) \dfrac{dy}{dx} = y^2$.

Problema 2 *Determine as soluções para a equação*

$$y' + 4xy = x^3 e^{x^2}$$

Problema 3 *Resolva:*

a). $(x^2 - y^2)\, dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$;

b). $(3x^2 + y)\, dx + (x^2 y - x)dy = 0$.

Problema 4 *Encontre todas as soluções possíveis*

$$(y + 2)\, dx = (2x + y - 4)\, dy$$

Problema 5 *Resolva*

$$(y + \sqrt{xy})\, dx = xdy$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito 1^{a} Prova **2016**
Data: Terça-feira, 21 de Março **Turma TX**

Exercício 1

a). *Deseja-se resolver o seguinte problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x^2\dfrac{dy}{dx} = y - xy \\ y(-1) = -1 \end{cases}$$

Para isto deve-se resolver inicialmente, a equação diferencial ordinária

$$x^2\frac{dy}{dx} = y - xy$$

Usando a separação de variáveis, observe que,

$$\begin{aligned}
x^2\frac{dy}{dx} &= y - xy && \Rightarrow \\
x^2 dy &= (1-x)y dx && \Rightarrow \\
\frac{dy}{y} &= \tfrac{(1-x)}{x^2}dx && \Rightarrow \\
\int\frac{dy}{y} &= \int\frac{(1-x)}{x^2}dx && \Rightarrow \\
\ln|y| &= \int\left(\tfrac{1}{x^2} - \tfrac{1}{x}\right)dx && \Rightarrow \\
\ln|y| &= -\tfrac{1}{x} - \ln|x| + c && \Rightarrow \\
|y| &= e^{-\frac{1}{x} - \ln|x| + c} && \Rightarrow \\
|y| &= \frac{e^{-\frac{1}{x}+c}}{|x|} && \Rightarrow \\
|y| &= \left|\frac{e^{-\frac{1}{x}+c}}{x}\right| && \Rightarrow \\
y &= \frac{e^{-\frac{1}{x}+c}}{x}
\end{aligned}$$

Usando agora a condição inicial dada, segue-se que

$$\begin{aligned}
y(-1) &= -1 && \Rightarrow \\
\frac{e^{1+c}}{-1} &= -1 && \Rightarrow \\
e^{1+c} &= 1 && \Rightarrow \\
1 + c &= 0 && \Rightarrow \\
c &= -1
\end{aligned}$$

Portanto, a solução do PVI dado é

$$y(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}-1}}{x}$$

□

b). *Deseja-se resolver a seguinte* ***edo***

$$\left(e^x + e^{-x}\right)\frac{dy}{dx} = y^2$$

Usando-se separação de variáveis observe que

$$\begin{aligned}
\left(e^x + e^{-x}\right)\frac{dy}{dx} &= y^2 && \Rightarrow \\
\left(e^x + e^{-x}\right)dy &= y^2 dx && \Rightarrow \\
\frac{dy}{y^2} &= \frac{dx}{e^x + e^{-x}} && \Rightarrow \\
\frac{dy}{y^2} &= \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx && \Rightarrow \\
\int\frac{dy}{y^2} &= \int\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx && \Rightarrow \\
-\frac{1}{y} &= \operatorname{arctg}\left(e^x\right) + c && \Rightarrow \\
y &= \frac{-1}{\operatorname{arctg}\left(e^x\right) + c}
\end{aligned}$$

onde $c \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 2 *Deseja-se determinar todas as soluções da* ***edo***

$$y' + 4xy = x^3 e^{x^2}$$

Observe que trata-se de uma ***edo*** *linear de 1^{a} ordem, cujo fator integrante é dado por*

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= e^{\int 4x dx} \\
&= e^{2x^2 + c_1}
\end{aligned}$$

Desta forma, considerando $c_1 = 0$, *segue-se que*

$$\begin{aligned}
[\mu(x)y(x)]' &= \mu'(x)y(x) + \mu(x)y'(x) \\
&= 4xe^{2x^2}y(x) + e^{2x^2}y'(x) \\
&= e^{2x^2}\left(4xy(x) + y'(x)\right)
\end{aligned}$$

Ou seja, multiplicando-se ambos os lados da ***edo*** *dada por* $\mu(x)$*, tem-se*

$$\begin{aligned}
e^{2x^2}(4xy+y') &= e^{2x^2}x^3e^{x^2} && \Rightarrow\\
[\mu\, y]' &= x^3e^{3x^2} && \Rightarrow\\
\mu\, y &= \int x^3e^{3x^2}dx && \Rightarrow\\
\mu\, y &= e^{3x^2}\left(\tfrac{1}{6}x^2-\tfrac{1}{18}\right)+c_2 && \Rightarrow\\
y &= \frac{1}{\mu(x)}\left[e^{3x^2}\left(\tfrac{1}{6}x^2-\tfrac{1}{18}\right)+c_2\right] && \Rightarrow\\
y &= \frac{1}{e^{2x^2}}\left[e^{3x^2}\left(\tfrac{1}{6}x^2-\tfrac{1}{18}\right)+c_2\right] && \Rightarrow\\
y &= e^{x^2}\left(\tfrac{1}{6}x^2-\tfrac{1}{18}\right)+c_2e^{-2x^2}
\end{aligned}$$

Com $c_2\in\mathbb{R}$. ■

Exercício 3

a). *Para resolver a equação*

$$(x^2-y^2)dx+(x^2-2xy)dy=0$$

Inicialmente considere

$$\begin{aligned}
M(x,y)&=x^2-y^2\\
N(x,y)&=x^2-2xy
\end{aligned}$$

e observe que

$$M(tx,ty)=t^2(x^2-y^2)=t^2M(x,y),$$

$$N(tx,ty)=t^2(x^2-2xy)=t^2N(x,y).$$

Ou seja, as funções M *e* N *são homogêneas de grau 2. Assim, colocando* y^2 *em evidência, tem-se*

$$y^2\left[\left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)dx+\left(\frac{x^2}{y^2}-2\frac{x}{y}\right)dy\right]=0\Rightarrow$$

$$\left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)dx+\left(\frac{x^2}{y^2}-2\frac{x}{y}\right)dy=0 \qquad (1)$$

Considere

$$\frac{x}{y}=u\Leftrightarrow x=uy$$

Segue-se disto, que

$$dx=ydu+udy$$

e, substituido-se em 1, tem-se

$$\begin{aligned}
(u^2-1)(ydu+udy)+(u^2-2u)dy=0 &&\Leftrightarrow\\
(u^2-1)ydu+\left(u^3+u^2-3u\right)dy=0 &&\Leftrightarrow\\
\left(u^3+u^2-3u\right)dy=-(u^2-1)ydu &&\Leftrightarrow\\
\frac{dy}{y}=\frac{1-u^2}{u^3+u^2-3u}du &&\Leftrightarrow\\
\int\frac{dy}{y}=\int\frac{1-u^2}{u^3+u^2-3u}du &&\Leftrightarrow\\
\ln|y|=\int\frac{1-u^2}{u^3+u^2-3u}du
\end{aligned}$$

(Em virtude do grau de dificuldade de resolução desta última integral, este item do problema foi cancelado e o seu valor ***(1,0 ponto)*** *será computado a todos os alunos que participaram da prova.)* □

b). *Para resolver a equação*

$$(3x^2+y)dx+(x^2y-x)dy=0$$

Inicialmente considere

$$M(x,y)=3x^2+y$$

$$N(x,y)=x^2y-x$$

e observe que

$$\begin{aligned}
\frac{M_y-N_x}{N}&=\frac{1-2xy+1}{x^2y-x}\\
&=\frac{2-2xy}{x^2y-x}\\
&=\frac{2(1-xy)}{-x(1-xy)}\\
&=-\frac{2}{x}
\end{aligned}$$

depende apenas da variável x*, ou seja, o fator integrante*

$$\begin{aligned}
\mu(x)&=e^{\int-\frac{2}{x}dx}\\
&=e^{-2\ln|x|}\\
&=e^{\ln|x|^{-2}}\\
&=\frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

transforma a equação dada, através da multiplicação por $\mu(x)$ *em ambos os lados, numa equação* *equivalente que é exata:*

$$\mu(x)\left[(3x^2+y)dx+(x^2y-x)dy\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x^2}\left[(3x^2+y)dx+(x^2y-x)dy\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(3+\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(y-\frac{1}{x}\right)dy=0$$

Assim, as soluções da ***edo*** *em questão obedece a equação*

$$\varphi(x,y)=c_1$$

Onde

$$\nabla\varphi(x,y)=\left(3+\frac{y}{x^2}, y-\frac{1}{x}\right)$$

Em outras palavras,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=3+\dfrac{y}{x^2} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=y-\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Resolvendo-se este sistema, encontra-se

$$\varphi(x,y)=\frac{y^2}{2}-\frac{y}{x}+3x+c_2,\ c_2\in\mathbb{R}$$

Então, as soluções da equação, dadas de forma implícita, são

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{2}-\frac{y}{x}+3x+c_2 &= c_1 && \Leftrightarrow \\ \frac{y^2}{2}-\frac{y}{x}+3x &= c_2-c_1 && \Leftrightarrow \\ \frac{y^2}{2}-\frac{y}{x}+3x &= c,\ c\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Para resolver a equação*

$$(y+2)\,dx=(2x+y-4)\,dy$$

Considere a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} Y=y+2 \\ X=x-3 \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} dY=dx \\ dX=dy \end{cases}$$

Substituido na ***edo*** *dada tem-se*

$$Y\,dX=(2X+Y)\,dY \Leftrightarrow \tag{2}$$

$$dX=\left(2\frac{X}{Y}+1\right)dY$$

Tome

$$u=\frac{X}{Y}\Leftrightarrow X=uY$$

e observe que

$$dX=Y\,du+udY.$$

Convém observar que com esta escolha para a variável u, estar-se buscando soluções para a ***edo*** *dada tendo y como variável livre e x dependente de y, ou seja $x=x(y)$. Retornado à equação 2, tem-se*

$$\begin{aligned} Y\,du+udY &= (2u+1)\,dY && \Leftrightarrow \\ Y\,du &= (u+1)\,dY && \Leftrightarrow \\ \frac{du}{u+1} &= \frac{dY}{Y} && \Leftrightarrow \\ \int\frac{du}{u+1} &= \int\frac{dY}{Y} && \Leftrightarrow \\ \ln|u+1| &= \ln|Y|+c_1 && \Leftrightarrow \\ u+1 &= e^{\ln|Y|+c_1} && \Leftrightarrow \\ u &= \pm e^{c_1}Y-1 && \Leftrightarrow \\ u &= c_2Y-1 \end{aligned}$$

Segue-se disto, que

$$\frac{X}{Y}=c_2Y-1\Rightarrow$$

$$X=c_2Y^2-Y$$

Retornando para as variáveis x e y, tem-se

$$x-3=c_2\,(y+2)^2-(y+2)\Rightarrow$$

$$x(y)=c_2\,(y+2)^2-y+1$$

com $c_2\in\mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Para resolver a* ***edo***

$$(y+\sqrt{xy})\,dx=xdy,$$

observe que

$$\begin{aligned} (y+\sqrt{xy})\,dx &= xdy && \Leftrightarrow \\ \left(\frac{y+\sqrt{xy}}{x}\right)dx &= dy && \Leftrightarrow \\ \left(\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{xy}}{x}\right)dx &= dy && \Leftrightarrow \\ \left(\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{xy}{x^2}}\right)dx &= dy && \Leftrightarrow \\ \left(\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dx &= dy. \end{aligned}$$

Considere

$$u = \frac{y}{x}$$

Ou seja

$$y = ux$$

e

$$dy = xdu + udx.$$

Substituindo na ***edo*** *dada tem-se*

$$\begin{aligned}
\left(u + \sqrt{u}\right) dx &= xdu + udx && \Leftrightarrow \\
\left(u + \sqrt{u} - u\right) dx &= xdu && \Leftrightarrow \\
\sqrt{u}dx &= xdu && \Leftrightarrow \\
\frac{dx}{x} &= \frac{du}{\sqrt{u}} && \Leftrightarrow \\
\int \frac{dx}{x} &= \int \frac{du}{\sqrt{u}} && \Leftrightarrow \\
\ln|x| + c_1 &= 2\sqrt{u} && \Leftrightarrow \\
\tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{c_1}{2} &= \sqrt{u} && \Leftrightarrow \\
u &= \quad \left(\ln\sqrt{x} + c_2\right)^2
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
y(x) &= u(x)x \\
&= x\left(\ln\sqrt{x} + c_2\right)^2
\end{aligned}$$

com $c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma TX

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2ª Prova **2º Semestre** **2016**

Data: 03 de Abril de 2017 **Duração: 18:30 - 20:30**

Problema 1 *A função $y_1(t)$ é uma solução da equação diferencial dada. Encontre uma segunda solução $y_2(t)$ linearmente independente.*

$$(1-t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0, \;\; y_1(t) = t$$

Problema 2 *Encontre uma solução particular da* ***edo***

$$y'' + 4y' + 4y = te^{\alpha t}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Problema 3 *Determine a solução geral:*

a). $y'' + y = \operatorname{tg} x$;

b). $y'' + y = \sec^2 x$.

Problema 4 *Encontre a solução geral da equação diferencial:*

$$xy'' - 4y' = x^4$$

Problema 5 *Use a substituição $y = (x - x_0)^m$ e encontre a solução geral da equação*

$$(x+3)^2 y'' - 8(x+3)y' + 14y = 0$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 2ª Prova **2016**
Data: Terça-feira, 04 de Abril de 2017 **Turma TX**

Exercício 1 *Sabe-se que $y_1(t) = t$ é uma solução da equação diferencial*

$$(1-t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0$$

Observe inicialmente que

$$1 - t^2 \neq 0 \Rightarrow t \neq \pm 1$$

Supondo que esta equação seja parte de um problema com valor inicial $t = 0$, segue-se que

$$-1 < t < 1$$

é o maior intervalo contendo $t_0 = 0$ (Para outros casos, as devidas considerações devem ser feitas).

Usando a ***redução de ordem****, considere*

$$\begin{aligned} y_2(t) &= u(t)y_1(t) \\ &= u(t)t \end{aligned}$$

Assim, tem-se

$$y_2'(t) = tu'(t) + u(t)$$

$$\begin{aligned} y_2''(t) &= u'(t) + tu''(t) + u'(t) \\ &= 2u'(t) + tu''(t) \end{aligned}$$

Como deseja-se que $y_2(t)$ seja também uma solução da equação diferencial dada, segue-se que

$$(1-t^2)y_2'' - 2ty_2' + 2y_2 = 0,$$

ou seja

$$\left(t - t^3\right) u''(t) + \left(2 - 4t^2\right) u'(t) = 0 \qquad (1)$$

Considere

$$\omega(t) = u'(t).$$

Disto segue-se que

$$\omega'(t) = u''(t)$$

e a equação (1) torna-se

$$\left(1 - t^2\right) t\omega'(t) + 2\left(1 - 2t^2\right)\omega(t) = 0$$

Usando ***separação de variáveis****, tem-se*

$$\begin{aligned} \left(1 - t^2\right) t\omega'(t) &= -2\left(1 - 2t^2\right)\omega(t) && \Rightarrow \\ \frac{\omega'(t)}{\omega(t)} &= \frac{-2\left(1 - 2t^2\right)}{\left(1 - t^2\right)t} && \Rightarrow \\ \int \frac{\omega'(t)}{\omega(t)} dt &= -2\int \frac{1 - 2t^2}{\left(1 - t^2\right)t} dt \end{aligned}$$

Usando ***frações parciais****, perceba que*

$$\begin{aligned} \frac{1 - 2t^2}{\left(1 - t^2\right)t} &= \frac{1}{t} - \frac{1}{2\left(1 - t\right)} + \frac{1}{2\left(1 + t\right)} \\ &= \frac{1}{t} - \frac{t}{1 - t^2} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \int \frac{\omega'(t)}{\omega(t)} dt &= -2\int \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1 - t^2}\right) dt && \Rightarrow \\ \ln|\omega(t)| &= -2\ln|t| - \ln\left|1 - t^2\right| + c_1 && \Rightarrow \\ \omega(t) &= \pm e^{-2\ln|t|} e^{-\ln\left|1 - t^2\right|} e^{c_1} && \Rightarrow \\ \omega(t) &= c_2 \left|t\right|^{-2} \left|1 - t^2\right|^{-1} && \Rightarrow \\ \omega(t) &= \frac{c_2}{t^2\left|1 - t^2\right|},\ c_2 = \pm e^{c_1} \end{aligned}$$

Como $-1 < t < 1$, segue-se que

$$\begin{aligned} 1 + t > 0 &\Rightarrow |1 + t| = 1 + t \\ 1 - t > 0 &\Rightarrow |1 - t| = 1 - t \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left|1 - t^2\right| &= |1 + t|\,|1 - t| \\ &= (1 + t)(1 - t) \\ &= 1 - t^2 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \frac{c_2}{t^2(1 - t^2)} && \Rightarrow \\ u'(t) &= \frac{c_2}{t^2\left(1 - t^2\right)} && \Rightarrow \\ u(t) &= c_2 \int \frac{dt}{t^2\left(1 - t^2\right)} && \Rightarrow \end{aligned}$$

Observe que

$$\frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} u(t) &= c_2 \int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} \\ &= c_2 \left[\int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dt}{2(1-t)} + \int \frac{dt}{2(1+t)} \right] \\ &= c_2 \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln|1-t| + \frac{1}{2}\ln|1+t| + c_3 \right) \end{aligned}$$

Tomando $c_3 = 0$ e $c_2 = 1$, uma possível escolha para a função $u(t)$ seria

$$u(t) = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln(1-t) + \frac{1}{2}\ln(1+t)$$

e

$$\begin{aligned} y_2(t) &= t\,u(t) \\ &= -1 + \frac{t}{2}\ln(1-t) + \frac{t}{2}\ln(1+t) \\ &= -1 + \frac{t}{2}\ln(1-t^2) \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Usando o método dos* ***coeficientes a determinar****, considere a seguinte proposta de solução*

$$y(t) = Ate^{\alpha t} + Be^{\alpha t}$$

Observe que

$$\begin{aligned} y'(t) &= A\left(e^{\alpha t} + \alpha t e^{\alpha t}\right) + B\alpha e^{\alpha t} \\ y''(t) &= A\left(\alpha e^{\alpha t} + \alpha e^{\alpha t} + \alpha^2 t e^{\alpha t}\right) + B\alpha^2 e^{\alpha t} \end{aligned}$$

Substituindo na equação dada, teremos

$$\begin{aligned} &\left[\left(\alpha^2 A + 4\alpha A + 4A\right) t + 2\alpha A + B\alpha^2 + \right. \\ &\qquad \left. + 4A + 4B\alpha + 4B\right] e^{\alpha t} = te^{\alpha t} \end{aligned}$$

Ou seja

$$\left\{ \begin{array}{r} (\alpha+2)^2 A = 1 \\ 2(\alpha+2)A + (\alpha+2)^2 B = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{(\alpha+2)^2},\ \alpha \neq -2 \\ B &= \frac{-2}{(\alpha+2)^3} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$y(t) = \frac{te^{\alpha t}}{(\alpha+2)^2} - \frac{2e^{\alpha t}}{(\alpha+2)^3},\ \alpha \neq -2$$

Quando $\alpha = 2$, tem-se a seguinte equação diferencial

$$y'' + 4y' + 4y = te^{-2t},$$

cujas soluções da parte homogênea são

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{-2t} \\ y_2(t) &= te^{-2t} \end{aligned}$$

Assim, perceba que

$$\begin{aligned} W &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ -2e^{-2t} & (1-2t)e^{-2t} \end{bmatrix} \\ &= e^{-4t} \end{aligned}$$

Além disso

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{bmatrix} 0 & te^{-2t} \\ te^{-2t} & (1-2t)e^{-2t} \end{bmatrix} \\ &= t^2 e^{-4t} \\ W_2 &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ -2e^{-2t} & te^{-2t} \end{bmatrix} \\ &= te^{-4t} \end{aligned}$$

Logo, pelo ***método da variação dos parâmetros****,*

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} = t^2 \Rightarrow u_1(t) = \frac{t^3}{3} + c_1 \\ u_2' &= \frac{W_2}{W} = t \Rightarrow u_2(t) = \frac{t^2}{2} + c_2 \end{aligned}$$

e, tomando $c_1 = c_2 = 0$, uma solução paraticular da equação é dada por

$$\begin{aligned} y_p(t) &= y_1(t)u_1(t) + y_2(t)u_2(t) \\ &= e^{-2t}\frac{t^3}{3} + te^{-2t}\frac{t^2}{2} \\ &= \frac{5}{6}t^3 e^{-2t} \end{aligned}$$

■

Exercício 3

a). *Resolvendo a equação homogênea correspondente à equação dada, ou seja*

$$y'' + y = 0$$

Tem-se como equação auxiliar

$$k^2 + 1 = 0,$$

*cujas soluções são $k = \pm i$ e donde segue-se que as soluções da **edo** são construídas a partir das funções*

$$y_1(x) = \cos x$$
$$y_2(x) = \operatorname{sen} x$$

Usando-se o método da variaçãodos parâmetros para encontrar uma solução particular da equação não homogênea, tem-se

$$W(1, e^x) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$$

$$= 1$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ & \\ \operatorname{tg} x & \cos x \end{bmatrix}$$

$$= -\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \operatorname{tg} x \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{tg} x \cos x$$

Portanto,

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W} = -\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x$$

$$u_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \operatorname{tg} x \cos x$$

e assim,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \int -\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x \, dx \\ &= -\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} dx \\ &= -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx \\ &= -\int \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x \right) dx \\ &= -\int \sec x \, dx + \int \cos x \, dx \\ &= -\ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + \operatorname{sen} x + c_3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \int \operatorname{tg} x \cos x \, dx \\ &= \int \operatorname{sen} x \, dx \\ &= -\cos x + c_4 \end{aligned}$$

Considerando $c_3 = c_4 = 0$, uma solução particular da edo é dada por

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_1(x)u_1(x) + y_2(x)u_2(x) \\ &= \cos x \left[-\ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + \operatorname{sen} x \right] - \\ &\quad - \operatorname{sen} x \cos x \\ &= \cos x \left[-\ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \right] \\ &= -\cos x \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| \end{aligned}$$

Logo, a solução geral da equação dada é:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x) \\ &= c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \cos x \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| \end{aligned}$$

$\square$

b). *A equação homogênea correspondente à equação dada é a mesma do item (a), ou seja,*

$$y_1(x) = \cos x$$
$$y_2(x) = \operatorname{sen} x$$

*e usando novamente o **método da variação dos parâmetros** para encontrar uma solução particular* *da equação não homogênea, tem-se*

$$W(1, e^x) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$$

$$= 1$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ & \\ \sec^2 x & \cos x \end{bmatrix}$$

$$= -\sec^2 x \operatorname{sen} x$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \sec^2 x \end{bmatrix}$$

$$= \sec^2 x \cos x$$

Portanto

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W} = -\sec^2 x \operatorname{sen} x$$

$$u_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \sec^2 x \cos x$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\int \sec^2 x \operatorname{sen} x \, dx \\ &= -\int \frac{\operatorname{sen} x \, dx}{\cos^2 x} \\ &= -\frac{1}{\cos x} + c_3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \int \sec^2 x \cos x \, dx \\ &= \int \frac{dx}{\cos x} \\ &= \int \sec x \, dx \\ &= \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c_4 \end{aligned}$$

Considerando $c_3 = c_4 = 0$, uma solução particular da edo é dada por

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_1(x)u_1(x) + y_2(x)u_2(x) \\ &= \cos x \left(-\frac{1}{\cos x}\right) + \operatorname{sen} x \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| \\ &= \operatorname{sen} x \, \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| - 1 \end{aligned}$$

Logo, a solução geral da equação dada é:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x) \\ &= c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \, \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| - 1 \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Observe que a equação dada*

$$xy'' - 4y' = x^4$$

é uma equação de Euler, uma vez que pode ser reescrita como

$$x^2y'' - 4xy' + 0y = x^5$$

através de uma multiplicação por x em ambos os lados da mesma. Assim, para solução da equação homogênea correspondente, considere como proposta de solução a função

$$y(x) = x^m$$

e observe que

$$\begin{aligned} y'(x) &= mx^{m-1} \\ y''(x) &= m(m-1)x^{m-2} \end{aligned}$$

Substituindo na equação dada, tem-se

$$\begin{aligned} x\left[m(m-1)x^{m-2}\right] - 4mx^{m-1} = 0 &\Leftrightarrow \\ m(m-1)x^{m-1} - 4mx^{m-1} = 0 &\Leftrightarrow \\ \left(m^2 - 5m\right)x^{m-1} = 0 &\Leftrightarrow \\ m^2 - 5m = 0 & \end{aligned}$$

Donde segue-se que

$$m = 5 \text{ ou } m = 0$$

ou seja

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^0 = 1 \\ y_2(x) &= x^5 \end{aligned}$$

Usando o método da variãção dos parâmetros para encontrar uma solução particular da equação não homogênea, tem-se

$$W(1, e^x) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x^5 \\ 0 & 5x^4 \end{bmatrix}$$

$$= 5x^4$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & x^5 \\ g(x) & 5x^4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x^5 \\ x^3 & 5x^4 \end{bmatrix}$$

$$= -x^8$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^3 \end{bmatrix}$$

$$= x^3$$

Portanto

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W} = \frac{-x^8}{5x^4} = -\frac{x^4}{5}$$
$$u_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{x^3}{5x^4} = \frac{1}{5x}$$

Ou seja,

$$u_1(x) = -\frac{1}{5}\int x^4 dx$$
$$= -\frac{x^5}{25} + c_3$$

e

$$u_2(x) = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x}\, dx$$
$$= \frac{1}{5}\ln x + c_4$$

Considerando $c_3 = c_4 = 0$, uma solução particular da edo é dada por

$$y_p(x) = y_1(x)u_1(x) + y_2(x)u_2(x)$$
$$= -\frac{x^5}{25} + \frac{x^5}{5}\ln x$$

Logo, a solução geral da equação dada é:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x)$$
$$= c_1 + c_2 x^5 + -\frac{x^5}{25} + \frac{x^5}{5}\ln x$$
$$= \frac{x^5}{5}\ln x + c_5 x^5 + c_1$$

■

Exercício 5 *Considere como proposta de solução a função*

$$y(x) = (x+3)^m,$$

observe que

$$y'(x) = m(x+3)^{m-1}$$
$$y''(x) = m(m-1)(x+3)^{m-2}$$

e substituindo na equação dada, tem-se

$$m(m-1)(x+3)^m - 8m(x+3)^m + 14(x+3)^m = 0 \Leftrightarrow$$
$$[m(m-1) - 8m + 14]\,(x+3)^m = 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(m^2 - 9m + 14\right)(x+3)^m = 0 \Leftrightarrow$$
$$m^2 - 9m + 14 = 0$$

Donde segue-se que

$$m = 7 \text{ ou } m = 2$$

Ou seja

$$y_1(x) = (x+3)^2$$
$$y_2(x) = (x+3)^7$$

e a solução geral da equação dada é

$$y_c(x) = c_1(x+3)^2 + c_2(x+3)^7$$

sendo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma TX

Prof^o. Edson

3ª Prova **2º Semestre** **2016**

Data: 15 de Maio de 2017 **Duração: 18:30 - 20:30**

Problema 1 *Determine o intervalo e o raio de convergência das seguintes séries*

a). $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}\left(4x-5\right)^n$

b). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^2+n}\left(3x-1\right)^n$

Problema 2 *Encontre a* ***série de Maclaurin*** *e seu intervalo de convergência, para a função*

$$f(x) = \frac{1}{2+x}.$$

Problema 3 *Determine as duas soluções em séries de potências, em torno do ponto $x = 0$, para a equação diferencial*

$$(x^2+2)y'' + 3xy' - y = 0$$

Problema 4 *Determine as duas soluções em séries de potências, em torno do ponto $x = 0$, para a equação diferencial*

$$3xy'' + (2-x)y' - y = 0$$

Problema 5 *Resolva o seguinte problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'' - 4y' = 6e^{3t} - 3e^{-t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito 3ª Prova **2016**
Data: Quarta-feira, 24 de Maio **Turma TX**

Exercício 1

a). *Observe que*

$$a_n = 3^{-n}(4x-5)^n = \frac{(4x-5)^n}{3^n} = \left(\frac{4x-5}{3}\right)^n$$

Perceba que

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\left(\frac{4x-5}{3}\right)^n\right|} = \left|\frac{4x-5}{3}\right|$$

Segundo o ***teste da raíz*** *a série será absolutamente convergente quando*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

Ou seja,

$$\left|\frac{4x-5}{3}\right| < 1 \Leftrightarrow$$
$$|4x-5| < 3 \Leftrightarrow$$
$$\left|4\left(x-\frac{5}{4}\right)\right| < 3 \Leftrightarrow$$
$$\left|x-\frac{5}{4}\right| < \frac{3}{4}$$

Portanto, a série é covergente no intervalo

$$-\frac{3}{4} < x - \frac{5}{4} < \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 2$$

com raio de convergência $r = \frac{3}{4}$. □

b). *Observe que*

$$a_n = \frac{(3x-1)^n}{n(n+1)}$$

e

$$a_{n+1} = \frac{(3x-1)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$$

Perceba que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3x-1)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\frac{n(n+1)}{(3x-1)^n} = \frac{n}{n+2}(3x-1)$$

Segundo o ***teste da razão*** *a série será absolutamente convergente quando*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

Ou seja,

$$|3x-1| < 1 \Leftrightarrow$$
$$\left|3\left(x-\frac{1}{3}\right)\right| < 1 \Leftrightarrow$$
$$\left|x-\frac{1}{3}\right| < \frac{1}{3}$$

Portanto, a série é covergente no intervalo

$$-\frac{1}{3} < x - \frac{1}{3} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{2}{3}$$

com raio de convergência $r = \frac{1}{3}$. ■

Exercício 2 *Da* ***série geométrica*** *(também conhecida por* ***progressão geométrica****), sabe-se que*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

para $|x| < 1$.

Observe que

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)}$$

Trocando x por $\frac{-x}{2}$ na série geométrica, tem-se que

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\dfrac{x}{2}} &= 1-\frac{x}{2}+\left(\frac{-x}{2}\right)^2+\left(\frac{-x}{2}\right)^3+\cdots\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+x} &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^n}{2^n}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^n}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

desde que $\left|\frac{x}{2}\right|<1$, *ou seja* $|x|<2$. ■

Exercício 3 *Suponha que*

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

Então

$$\begin{aligned}y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}\end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial

$$(x^2+2)y''+3xy'-y=0$$

tem-se

$$\begin{aligned}&(x^2+2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\\ &+3x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0 \quad\Rightarrow\\ &\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}2n(n-1)a_nx^{n-2}+\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}3na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0 \quad\Rightarrow\\ &\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\\ &\sum_{n=1}^{\infty}3na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0 \quad\Rightarrow\\ &4a_2-a_0+(12a_3+2a_1)\,x+\\ &+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n^2+2n-1)a_n+2(n+2)(n+1)a_{n+2}\right]x^n=0\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}4a_2-a_0&=0\\ 12a_3+2a_1&=0\\ (n^2+2n-1)a_n+2(n+2)(n+1)a_{n+2}&=0\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}a_2&=\frac{a_0}{4}\\ a_3&=-\frac{a_1}{6}\\ a_{n+2}&=-\frac{(n^2+2n-1)}{2(n+2)(n+1)}a_n\end{aligned}$$

onde $a_0,a_1\in\mathbb{R}$. *Deduzindo alguns termos da solução*

$$\begin{aligned}a_4&=-\frac{7}{96}a_0; & a_5&=\frac{7}{120}a_1;\\ a_6&=-\frac{161}{5760}a_0; & a_7&=\frac{17}{720}a_1;\\ a_8&=-\frac{1081}{92\,160}a_0; & a_9&=\frac{527}{51\,840}a_1\end{aligned}$$

Portanto a solução geral da equação diferencial é dada por

$$y_c(x)=-a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$$

Sendo

$$y_1(x)=1+\frac{1}{4}x^2+\frac{7}{96}x^4+\frac{161}{5760}x^6+\frac{1081}{92\,160}x^8+\cdots$$

$$y_2(x)=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{7}{120}x^5+\frac{17}{720}x^7+\frac{527}{51\,840}x^9+\cdots$$

■

Exercício 4 *Observe que a equação diferencial*

$$3xy''+(2-x)y'-y=0$$

possui um ponto singular regular em $x=0$. *Assim suponha que sua solução seja dada por*

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$$

sendo $r\in\mathbb{R}_+$. *Disto segue-se que*

$$\begin{aligned}y'(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}\\ y''(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}\end{aligned}$$

e substituindo na equação tem-se

$$3x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}+ (2-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-1}+ +\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)a_nx^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}- -\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0 \quad \Rightarrow$$

$$x^r\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(3n+3r-1)a_nx^{n-1}- \sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)a_nx^{n}\right\}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+1+r)(3n+2+3r)a_{n+1}x^{n}- -\sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)a_nx^{n}=0 \quad \Rightarrow$$

$$r\left(3r-1\right)a_0x^{-1}+ +\sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)\left[(3n+2+3r)a_{n+1}-a_n\right]x^n=0$$

Segue-se disto que

$$r\left(3r-1\right)=0 \Rightarrow r=0\,ou\,r=\frac{1}{3}$$

e

$$a_{n+1}=\frac{(n+r+1)a_n}{(n+1+r)(3n+2+3r)} = \frac{a_n}{3n+2+3r}$$

Quando $r=0$*, tem-se*

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{3n+2}$$

e

$$a_0\in\mathbb{R}$$

$$a_1=\frac{1}{2}a_0$$

$$a_2=\frac{1}{10}a_0$$

$$a_3=\frac{1}{80}a_0$$

$$a_4=\frac{1}{880}a_0$$

Ou seja

$$y_1(x)=\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{80}x^3+\frac{1}{880}x^4+\cdots\right)x^0 = 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{80}x^3+\frac{1}{880}x^4+\cdots$$

Quando $r=\frac{1}{3}$*, tem-se*

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{3(n+1)}$$

e

$$a_0\in\mathbb{R}$$

$$a_1=\frac{1}{3}a_0$$

$$a_2=\frac{1}{18}a_0$$

$$a_3=\frac{1}{162}a_0$$

$$a_4=\frac{1}{1944}a_0$$

Ou seja

$$y_2(x)=\left(1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{18}x^2+\frac{1}{162}x^3+\frac{1}{1944}x^4+\cdots\right)x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}x^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{18}x^{\frac{7}{3}}+\frac{1}{162}x^{\frac{10}{3}}+\frac{1}{1944}x^{\frac{13}{3}}+\cdots$$

■

Exercício 5 *Aplicando a* ***transformada de Laplace*** *em ambos os lados da equação dada, tem-se*

$$\mathcal{L}\left\{y''-4y'\right\}=\mathcal{L}\left\{6e^{3t}-3e^{-t}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\{y''\}-4\mathcal{L}\{y'\}=6\mathcal{L}\{e^{3t}\}-3\mathcal{L}\{e^{-t}\} \quad \Rightarrow$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-4\left[sY(s)-y(0)\right]= =\frac{6}{s-3}-\frac{3}{s+1}$$

Sabe-se que

$$y(0)=1$$

$$y'(0)=-1$$

Logo

$$s^2Y(s)-s+1-4sY(s)+4=\frac{6}{s-3}-\frac{3}{s+1} \Rightarrow$$

$$\left(s^2-4s\right)Y(s)-s+5=\frac{6}{s-3}-\frac{3}{s+1} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{s^3 - 7s^2 + 10s + 30}{s\,(s-4)\,(s-3)(s+1)}$$

*Decompondo esta expressão em **frações parciais**, tem-se que*

$$Y(s) = \frac{5}{2s} + \frac{11}{10\,(s-4)} - \frac{2}{s-3} - \frac{3}{5\,(s+1)}$$

*e usando a **transforma de Laplace inversa**, obtem-se*

$$y(t) = \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} + \frac{11}{10}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-4}\} - 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-3}\} - \\ - \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\}$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{11}{10}e^{4t} - 2e^{3t} - \frac{3}{5}e^{-t}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma TX

Prof$^{\text{o}}$. Edson

Prova Final **1$^{\text{o}}$ Semestre** **2016**

Data: 22 de Maio de 2017 **Duração: 18:30 - 20:30**

Problema 1 *Resolva*
$$\left(3x^2 + y\right) dx + (x^2y - x)dy = 0.$$

Problema 2 *Resolva*
$$(y + \sqrt{xy})\, dx = xdy$$

Problema 3 *Encontre a solução geral da equação diferencial:*
$$xy'' - 4y' = x^4$$

Problema 4 *Determine as duas soluções em séries de potências, em torno do ponto $x = 0$, para a equação diferencial*
$$3xy'' + (2 - x)y' - y = 0$$

Problema 5 *Resolva o seguinte problema de valor inicial*
$$\begin{cases} y'' - 4y' = 6e^{3t} - 3e^{-t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito Prova Final **2016**
Data: Quarta-feira, 24 de Maio de 2017 **Turma TX**

Exercício 1 *Para resolver a equação*

$$(3x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0$$

Inicialmente considere

$$M(x, y) = 3x^2 + y$$

$$N(x, y) = x^2y - x$$

e observe que

$$\begin{aligned}\frac{M_y - N_x}{N} &= \frac{1 - 2xy + 1}{x^2y - x}\\ &= \frac{2 - 2xy}{x^2y - x}\\ &= \frac{2(1 - xy)}{-x(1 - xy)}\\ &= -\frac{2}{x}\end{aligned}$$

depende apenas da variável x, ou seja, o fator integrante

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\int -\frac{2}{x}dx}\\ &= e^{-2\ln|x|}\\ &= e^{\ln|x|^{-2}}\\ &= \frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

transforma a equação dada, através da multiplicação por $\mu(x)$ em ambos os lados, numa equação equivalente que é exata:

$$\mu(x)\left[(3x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x^2}\left[(3x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(3 + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$$

Assim, as soluções da ***edo*** *em questão obedece a equação*

$$\varphi(x, y) = c_1$$

Onde

$$\nabla\varphi(x, y) = \left(3 + \frac{y}{x^2}, y - \frac{1}{x}\right)$$

Em outras palavras,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 3 + \dfrac{y}{x^2}\\[2mm] \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = y - \dfrac{1}{x}\end{cases}$$

Resolvendo-se este sistema, encontra-se

$$\varphi(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} + 3x + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

Então, as soluções da equação, dadas de forma implícita, são

$$\begin{aligned}\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} + 3x + c_2 &= c_1 &&\Leftrightarrow\\ \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} + 3x &= c_2 - c_1 &&\Leftrightarrow\\ \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} + 3x &= c,\ c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Para resolver a* ***edo***

$$(y + \sqrt{xy})\,dx = xdy,$$

observe que

$$\begin{aligned}\left(y + \sqrt{xy}\right)dx &= xdy &&\Leftrightarrow\\ \left(\frac{y + \sqrt{xy}}{x}\right)dx &= dy &&\Leftrightarrow\\ \left(\frac{y}{x} + \frac{\sqrt{xy}}{x}\right)dx &= dy &&\Leftrightarrow\\ \left(\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{xy}{x^2}}\right)dx &= dy &&\Leftrightarrow\\ \left(\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)dx &= dy.\end{aligned}$$

Considere

$$u = \frac{y}{x}$$

Ou seja

$$y = ux$$

e

$$dy = xdu + udx.$$

Substituindo na ***edo*** *dada tem-se*

$$\begin{aligned}
(u+\sqrt{u})\,dx &= xdu + udx && \Leftrightarrow\\
(u+\sqrt{u}-u)\,dx &= xdu && \Leftrightarrow\\
\sqrt{u}dx &= xdu && \Leftrightarrow\\
\frac{dx}{x} &= \frac{du}{\sqrt{u}} && \Leftrightarrow\\
\int \frac{dx}{x} &= \int \frac{du}{\sqrt{u}} && \Leftrightarrow\\
\ln|x| + c_1 &= 2\sqrt{u} && \Leftrightarrow\\
\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{c_1}{2} &= \sqrt{u} && \Leftrightarrow\\
u &= \left(\ln\sqrt{x} + c_2\right)^2
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
y(x) &= u(x)x\\
&= x\left(\ln\sqrt{x} + c_2\right)^2
\end{aligned}$$

com $c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Observe que a equação dada*

$$xy'' - 4y' = x^4$$

é uma equação de Euler, uma vez que pode ser reescrita como

$$x^2y'' - 4xy' + 0y = x^5$$

através de uma multiplicação por x *em ambos os lados da mesma. Assim, para solução da equação homogênea correspondente, considere como proposta de solução a função*

$$y(x) = x^m$$

e observe que

$$\begin{aligned}
y'(x) &= mx^{m-1}\\
y''(x) &= m(m-1)x^{m-2}
\end{aligned}$$

Substituindo na equação dada, tem-se

$$\begin{aligned}
x\left[m(m-1)x^{m-2}\right] - 4mx^{m-1} &= 0 \Leftrightarrow\\
m(m-1)x^{m-1} - 4mx^{m-1} &= 0 \Leftrightarrow\\
\left(m^2 - 5m\right)x^{m-1} &= 0 \Leftrightarrow\\
m^2 - 5m &= 0
\end{aligned}$$

Donde segue-se que

$$m = 5 \text{ ou } m = 0$$

ou seja

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= x^0 = 1\\
y_2(x) &= x^5
\end{aligned}$$

Usando o método da variação dos parâmetros para encontrar uma solução particular da equação não homogênea, tem-se

$$\begin{aligned}
W(1, e^x) &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2\\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 1 & x^5\\ 0 & 5x^4 \end{bmatrix}\\
&= 5x^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_1 &= \begin{bmatrix} 0 & x^5\\ g(x) & 5x^4 \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 1 & x^5\\ x^3 & 5x^4 \end{bmatrix}\\
&= -x^8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_2 &= \begin{bmatrix} y_1 & 0\\ y_1' & g(x) \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & x^3 \end{bmatrix}\\
&= x^3
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
u_1'(x) &= \frac{W_1}{W} = \frac{-x^8}{5x^4} = -\frac{x^4}{5}\\
u_2'(x) &= \frac{W_2}{W} = \frac{x^3}{5x^4} = \frac{1}{5x}
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= -\frac{1}{5}\int x^4 dx\\
&= -\frac{x^5}{25} + c_3
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
u_2(x) &= \frac{1}{5}\int \frac{1}{x}\,dx\\
&= \frac{1}{5}\ln x + c_4
\end{aligned}$$

Considerando $c_3 = c_4 = 0$, *uma solução particular da edo é dada por*

$$y_p(x) = y_1(x)u_1(x) + y_2(x)u_2(x)$$

$$= -\frac{x^5}{25} + \frac{x^5}{5}\ln x$$

Logo, a solução geral da equação dada é:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x)$$

$$= c_1 + c_2 x^5 + -\frac{x^5}{25} + \frac{x^5}{5}\ln x$$

$$= \frac{x^5}{5}\ln x + c_5 x^5 + c_1$$

■

Exercício 4 *Observe que a equação diferencial*

$$3xy'' + (2-x)y' - y = 0$$

possui um ponto singular regular em $x = 0$. *Assim suponha que sua solução seja dada por*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

sendo $r \in \mathbb{R}_+$. *Disto segue-se que*

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

e substituindo na equação tem-se

$$3x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + (2-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^r\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(3n+3r-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)a_n x^n\right\} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+1+r)(3n+2+3r)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$r\,(3r-1)\,a_0 x^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)\left[(3n+2+3r)a_{n+1} - a_n\right]x^n = 0$$

Segue-se disto que

$$r\,(3r-1) = 0 \Rightarrow r = 0\, ou\, r = \frac{1}{3}$$

e

$$a_{n+1} = \frac{(n+r+1)a_n}{(n+1+r)(3n+2+3r)} = \frac{a_n}{3n+2+3r}$$

Quando $r = 0$, *tem-se*

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{3n+2}$$

e

$$a_0 \in \mathbb{R}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}a_0$$

$$a_2 = \frac{1}{10}a_0$$

$$a_3 = \frac{1}{80}a_0$$

$$a_4 = \frac{1}{880}a_0$$

Ou seja

$$y_1(x) = \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{80}x^3 + \frac{1}{880}x^4 + \cdots\right)x^0$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{80}x^3 + \frac{1}{880}x^4 + \cdots$$

Quando $r = \frac{1}{3}$, *tem-se*

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{3(n+1)}$$

e

$$a_0 \in \mathbb{R}$$

$$a_1 = \frac{1}{3}a_0$$

$$a_2 = \frac{1}{18}a_0$$

$$a_3 = \frac{1}{162}a_0$$

$$a_4 = \frac{1}{1944}a_0$$

Ou seja

$$y_2(x) = \left(1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{162}x^3 + \frac{1}{1944}x^4 + \cdots\right)x^{\frac{1}{3}}$$
$$= x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{18}x^{\frac{7}{3}} + \frac{1}{162}x^{\frac{10}{3}} + \frac{1}{1944}x^{\frac{13}{3}} + \cdots$$

■

Exercício 5 *Aplicando a **transformada de Laplace** em ambos os lados da equação dada, tem-se*

$$\mathcal{L}\left\{y'' - 4y'\right\} = \mathcal{L}\left\{6e^{3t} - 3e^{-t}\right\} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\{y''\} - 4\mathcal{L}\{y'\} = 6\mathcal{L}\{e^{3t}\} - 3\mathcal{L}\{e^{-t}\} \Rightarrow$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4\left[sY(s) - y(0)\right] =$$

$$= \frac{6}{s-3} - \frac{3}{s+1}$$

Sabe-se que

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = -1$$

Logo

$$s^2Y(s) - s + 1 - 4sY(s) + 4 = \frac{6}{s-3} - \frac{3}{s+1} \Rightarrow$$

$$\left(s^2 - 4s\right)Y(s) - s + 5 = \frac{6}{s-3} - \frac{3}{s+1} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{s^3 - 7s^2 + 10s + 30}{s\,(s-4)\,(s-3)(s+1)}$$

*Decompondo esta expressão em **frações parciais**, tem-se que*

$$Y(s) = \frac{5}{2s} + \frac{11}{10\,(s-4)} - \frac{2}{s-3} - \frac{3}{5\,(s+1)}$$

*e usando a **transforma de Laplace inversa**, obtem-se*

$$y(t) = \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} + \frac{11}{10}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-4}\} - 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-3}\} -$$
$$- \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\}$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{11}{10}e^{4t} - 2e^{3t} - \frac{3}{5}e^{-t}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma C4

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1ª Prova **1º Semestre** **2017**

Data: 25 de Julho **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Resolvas as equações diferenciais:*

a). $y' = 10^{x+y}$;

b). $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3 + 2y}{x^2 + 3x}$; $y(1) = 1$.

Problema 2 *Determine as soluções para a equação*

$$(x+1)\frac{dy}{dx} + (x+2)y = 2xe^{-x}$$

Problema 3 *Encontre todas as soluções possíveis*

$$x\frac{dy}{dx} = 2xe^{x} - y + 6x^2$$

Problema 4 *Encontre todas as soluções possíveis*

$$\left(1 + \frac{2}{y}\operatorname{sen} x\right) dy + \cos x \, dx = 0$$

Problema 5 *Encontre todas as soluções possíveis*

$$\frac{dy}{dx} = y\left(xy^3 - 1\right)$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 1ª Prova **2017**
Data: Segunda-feira, 21 de Agosto **Turma C4**

Exercício 1

a). *Deseja-se resolver a seguinte* ***edo***

$$y' = 10^{x+y}$$

Para isto observe inicialmente que a equação dada pode ser reescrita como

$$\frac{dy}{dx} = 10^x 10^y$$

Usando ***separação de variáveis****, tem-se,*

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{10^y} &= 10^x dx && \Rightarrow\\
10^{-y}dy &= 10^x dx && \Rightarrow\\
\int 10^{-y}dy &= \int 10^x dx && \Rightarrow\\
\int e^{\ln 10^{-y}}dy &= \int e^{\ln 10^x}dx && \Rightarrow\\
\int e^{-y\ln 10}dy &= \int e^{x\ln 10}dx && \Rightarrow\\
-\frac{e^{-y\ln 10}}{\ln 10} &= \frac{e^{x\ln 10}}{\ln 10} + c_0 && \Rightarrow\\
-\frac{10^{-y}}{\ln 10} &= \frac{10^x}{\ln 10} + c_0 && \Rightarrow\\
10^{-y} &= -10^x \underbrace{-c_0 \ln 10}_{c_1} && \Rightarrow\\
10^x + 10^{-y} &= c_1
\end{aligned}$$

onde $c_1 \in \mathbb{R}$. □

b). *Deseja-se resolver o seguinte problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3+2y}{x^2+3x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Usando-se ***separação de variáveis*** *para a resolução da* ***edo****, tem-se*

$$\frac{dy}{y^3+2y} = \frac{dx}{x^2+3x}$$

Observe porém que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y^3+2y} &= \frac{1}{y\left(y^2+2\right)}\\
&= \frac{1}{2y} - \frac{y}{2\left(y^2+2\right)}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2+3x} &= \frac{1}{x\left(x+3\right)}\\
&= \frac{1}{3x} - \frac{1}{3\left(x+3\right)}
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y^3+2y} &= \int \frac{dx}{x^2+3x} && \Rightarrow\\
\int \left[\frac{1}{2y} - \frac{y}{2\left(y^2+2\right)}\right]dy &= \int \left[\frac{1}{3x} - \frac{1}{3\left(x+3\right)}\right]dx && \Rightarrow\\
\tfrac{1}{2}\ln|y| - \tfrac{1}{4}\ln\left(y^2+2\right) &= \tfrac{1}{3}\ln|x| - \tfrac{1}{3}\ln|x+3| + c_0 && \Rightarrow\\
\ln\frac{\sqrt{y}}{\sqrt[4]{(y^2+2)}} &= \ln\sqrt[3]{\left|\frac{x}{x+3}\right|} + c_0 && \Rightarrow\\
\frac{\sqrt{y}}{\sqrt[4]{(y^2+2)}} &= e^{\ln\sqrt[3]{\left|\frac{x}{x+3}\right|}} e^{c_0} && \Rightarrow\\
\frac{\sqrt{y}}{\sqrt[4]{(y^2+2)}} &= \underbrace{e^{c_0}}_{c_1}\sqrt[3]{\left|\frac{x}{x+3}\right|} && \Rightarrow\\
\sqrt[4]{\frac{y^2}{y^2+2}} &= c_1\sqrt[3]{\left|\frac{x}{x+3}\right|} && \Rightarrow\\
\frac{y^2}{y^2+2} &= \underbrace{c_1^4}_{c_2}\left(\frac{x}{x+3}\right)^{\frac{4}{3}} && \Rightarrow\\
\frac{y^2}{y^2+2} &= c_2\left(\frac{x}{x+3}\right)^{\frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

onde $c_2 \in \mathbb{R}$.

Usando a condição inicial $y(1) = 1$*, ou seja* $x = 1$ *e*

$y = 1$ tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+2} &= c_2\left(\frac{1}{1+3}\right)^{\frac{4}{3}} && \Rightarrow\\
\frac{1}{3} &= c_2\sqrt[3]{\frac{1}{4^4}} && \Rightarrow\\
c_2 &= \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}
\end{aligned}$$

Ou seja, a solução procurada, na forma implícita, é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{y^2}{y^2+2} &= \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}\left(\frac{x}{x+3}\right)^{\frac{4}{3}} && \Leftrightarrow\\
\frac{3y^2}{y^2+2} &= \left(\frac{4x}{x+3}\right)^{\frac{4}{3}} && \Leftrightarrow\\
\left(\frac{3y^2}{y^2+2}\right)^3 &= \left(\frac{4x}{x+3}\right)^4
\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Deseja-se determinar todas as soluções da* ***edo***

$$(x+1)\frac{dy}{dx} + (x+2)y = 2xe^{-x}$$

Observe que trata-se de uma ***edo*** *linear de 1ª ordem. Considerando-se inicialmente apenas a parte homogênea desta equação, ou seja*

$$(x+1)\frac{dy}{dx} + (x+2)y = 0$$

e resolvendo por ***separação de variáveis*** *tem-se*

$$\begin{aligned}
(x+1)\frac{dy}{dx} &= -(x+2)y && \Rightarrow\\
\frac{dy}{y} &= -\frac{x+2}{x+1}dx && \Rightarrow\\
\int\frac{dy}{y} &= -\int\frac{x+2}{x+1}dx && \Rightarrow\\
\ln|y| &= -\int\left(1+\tfrac{1}{x+1}\right)dx && \Rightarrow\\
\ln|y| &= -x - \ln|x+1| + c_0 && \Rightarrow\\
\ln|y| + \ln|x+1| &= -x + c_0 && \Rightarrow\\
\ln|y\,(x+1)| &= -x + c_0 && \Rightarrow\\
|y\,(x+1)| &= e^{-x+c_0} && \Rightarrow\\
y\,(x+1) &= \underbrace{\pm e^{c_0}}_{c_1}e^{-x} && \Rightarrow\\
y &= \frac{c_1}{e^x\,(x+1)}
\end{aligned}$$

Considerando $c_1 = 1$, tome

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= u(x)y(x)\\
&= u(x)\frac{1}{e^x\,(x+1)}\\
&= \frac{u(x)}{e^x\,(x+1)}
\end{aligned}$$

Disto segue-se que

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= \frac{u'(x)e^x(x+1) - u(x)\left[e^x(x+1)+e^x\right]}{e^{2x}(x+1)^2}\\
&= \frac{e^x\left[u'(x)(x+1) - u(x)(x+2)\right]}{e^{2x}(x+1)^2}\\
&= \frac{u'(x)(x+1) - u(x)(x+2)}{e^x(x+1)^2}
\end{aligned}$$

Substituindo na ***edo*** *original tem-se*

$$\begin{aligned}
(x+1)\frac{dy_1}{dx} + (x+2)y_1 &= 2xe^{-x} && \Rightarrow\\
\frac{u'(x)}{e^x} - \frac{u(x)(x+2)}{e^x(x+1)} + \frac{u(x)(x+2)}{e^x\,(x+1)} &= 2xe^{-x} && \Rightarrow\\
\frac{u'(x)}{e^x} &= 2xe^{-x} && \Rightarrow\\
u'(x) &= 2x && \Rightarrow\\
u(x) &= x^2 + c_2
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= \frac{u(x)}{e^x\,(x+1)} \Rightarrow\\
y_1(x) &= \frac{x^2+c_2}{e^x\,(x+1)}
\end{aligned}$$

Com $c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Deseja-se resolver a equação*

$$x\frac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$$

Reescrevendo esta equação, tem-se

$$\left(-2xe^x + y - 6x^2\right)dx + xdy = 0$$

Considerando

$$\begin{aligned} P(x,y) &= -2xe^x + y - 6x^2 \\ Q(x,y) &= x \end{aligned}$$

tem-se que

$$Q_x - Py = 1 - 1 = 0$$

Ou seja, a equação dada é exata. Portanto existe uma função $\varphi(x,y)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = P & (1) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = Q & (2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = -2xe^x + y - 6x^2 & (3) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = x & (4) \end{cases}$$

Integrando (4) em relação a y obtem-se

$$\varphi(x,y) = xy + k(x) \qquad (5)$$

e derivando (5) em relação a x,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y + k'(x) \qquad (6)$$

Igualando as equações (6) e (3) resulta em

$$k'(x) = -2xe^x - 6x^2$$

ou seja,

$$\begin{aligned} k(x) &= \int \left(-2xe^x - 6x^2\right) dx \\ &= -2(x-1)e^x - 2x^3 + c_0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= xy + k(x) \\ &= xy - 2(x-1)e^x - 2x^3 + c_0 \end{aligned}$$

*e a solução da **edo** é dada por*

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= c_1 && \Rightarrow \\ xy - 2(x-1)e^x - 2x^3 + c_0 &= c_1 && \Rightarrow \\ xy - 2(x-1)e^x - 2x^3 &= c_1 - c_0 && \Rightarrow \\ xy - 2(x-1)e^x - 2x^3 &= c_2 && \Rightarrow \end{aligned}$$

com $c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 4 *Para resolver a equação*

$$\left(1 + \frac{2}{y}\operatorname{sen} x\right) dy + \cos x\, dx = 0 \qquad (7)$$

considere

$$P(x,y) = \cos x$$

$$Q(x,y) = 1 + \frac{2}{y}\operatorname{sen} x$$

e observe que

$$Q_x - P_y = \frac{2}{y}\cos x - 0 \neq 0$$

*Ou seja, a **edo** em questão não é exata. Porém, perceba que*

$$\frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{\frac{2}{y}\cos x}{\cos x} = \frac{2}{y}$$

*O que significa que esta equação diferencial pode ser transformada numa **edo** exata equivalente. Para isto, considere*

$$\begin{aligned} \mu(y) &= e^{\displaystyle\int \frac{Q_x - P_y}{P} dy} \\ &= e^{\displaystyle\int \frac{2}{y} dy} \\ &= e^{2\ln|y| + c_0} \\ &= e^{c_0} y^2 \\ &= c_1 y^2 \end{aligned}$$

Tomando $c_1 = 1$ e multiplicando ambos os lados da equação (7) por $\mu(y)$ tem-se

$$y^2 \cos x\, dx + y^2\left(1 + \frac{2}{y}\operatorname{sen} x\right) dy = 0$$

que é exata. Assim, existe uma função $\varphi(x,y)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = y^2 \cos x & (8) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = y^2 + 2y\operatorname{sen} x & (9) \end{cases}$$

Integrando (8) e relação a x, tem-se

$$\varphi(x,y) = y^2 \operatorname{sen} x + k(y) \qquad (10)$$

e derivando (10) em relação a y resulta em

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y\operatorname{sen} x + k'(y) \qquad (11)$$

Igualando as equações (11) e (9) tem-se

$$k'(y) = y^2$$

ou seja,

$$\begin{aligned} k(y) &= \int y^2 dy \\ &= \frac{y^3}{3} + c_0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= y^2 \operatorname{sen} x + k(y) \\ &= y^2 \operatorname{sen} x + \frac{y^3}{3} + c_0 \end{aligned}$$

*e a solução da **edo** é dada por*

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= c_1 && \Rightarrow \\ y^2 \operatorname{sen} x + \frac{y^3}{3} + c_0 &= c_1 && \Rightarrow \\ y^2 \operatorname{sen} x + \frac{y^3}{3} &= c_1 - c_0 && \Rightarrow \\ y^2 \operatorname{sen} x + \frac{y^3}{3} &= c_2 && \Rightarrow \end{aligned}$$

com $c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Para resolver a **edo***

$$\frac{dy}{dx} = y\left(xy^3 - 1\right),$$

observe que esta equaçãopode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= xy^4 - y && \Leftrightarrow \\ y' + y &= xy^4 && \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$y^{-4}y' + y^{-3} = x$$

Considere

$$u = y^{-3}$$

e observe que

$$u' = -3y^{-4}y'$$

Assim, segue-se que

$$\begin{aligned} y^{-4}y' + y^{-3} &= x && \Leftrightarrow \\ -\frac{u'}{3} + u &= x && \Leftrightarrow \\ u' - 3u &= -3x \end{aligned}$$

*Ou seja, a **edo** resultante é linear cujo fator integrante é dado por*

$$\mu(x) = e^{\int -3dx} = e^{-3x+c_0}$$

*Tomando $c_0 = 0$ e multiplicando ambos os lados da **edo** em u tem-se*

$$\begin{aligned} e^{-3x}u' - 3e^{-3x}u &= 3xe^{-3x} && \Leftrightarrow \\ \tfrac{d}{dx}\left(ue^{-3x}\right) &= 3xe^{-3x} && \Leftrightarrow \\ ue^{-3x} &= \int 3xe^{-3x}dx && \Leftrightarrow \\ ue^{-3x} &= -\tfrac{1}{3}e^{-3x}\left(3x+1\right) + c_1 && \Leftrightarrow \\ u(x) &= -\tfrac{1}{3}\left(3x+1\right) + c_1 e^{3x} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} u &= y^{-3} && \Leftrightarrow \\ u &= \frac{1}{y^3} && \Leftrightarrow \\ y^3 &= \tfrac{1}{u} && \Leftrightarrow \\ y(x) &= u^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

ou seja

$$y(x) = \left[-\frac{1}{3}\left(3x+1\right) + c_1 e^{3x}\right]^{-\frac{1}{3}}$$

com $c_1 \in \mathbb{R}$. ■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma C4

Prof^{o}. Edson

2ª Prova **1º Semestre** **2017**

Data: 31 de Agosto **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Sabendo que* $y_1 = x^{\frac{1}{2}} \ln x$ *é uma solução da equação diferencial*

$$4x^2y'' + y = 0$$

Determine uma outra solução y_2 *desta equação, linearmente independente.*

Problema 2 *Encontre a solução geral da equação*

$$y'' + 2y' + 2 = 0$$

Problema 3 *Encontre a solução geral da equação*

$$y''' + y'' - 2y = 0$$

Problema 4 *Encontre a solução geral da equação*

$$y'' + y = 2x \operatorname{sen} x$$

Problema 5 *Encontre a solução geral da equação*

$$y'' - 9y = \frac{9x}{e^{3x}}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 2ª Prova **2017**
Data: Sexta-feira, 1 de Setembro **Turma C4**

Exercício 1 *Sabe-se que*

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}} \ln x$$

é uma solução da equação diferencial

$$4x^2 y'' + y = 0$$

Observe que esta equação pode ser reescrita como

$$y'' + \frac{1}{4x^2} y = 0$$

Ou seja, o coeficiente do termo de primeira ordem é a função

$$p(x) = 0$$

Segundo o método de ***redução de ordem****, uma outra solução linearmente independente para a* ***edo*** *em questão, é dada por*

$$y_2 = u(x) y_1(x)$$

sendo

$$u(x) = \int \frac{e^{\int -p(x)dx}}{y_1^2} dx$$

$$= \int \frac{e^{\int 0dx}}{x \ln^2 x} dx$$

$$= \int \frac{e^0}{x \ln^2 x} dx$$

$$= \int \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

Considerando

$$\omega = \ln x$$

tem-se que

$$d\omega = \frac{dx}{x}$$

Ou seja

$$u(x) = \int \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

$$= \int \frac{d\omega}{\omega^2}$$

$$= -\frac{1}{\omega} + c_0$$

$$= -\frac{1}{\ln x} + c_0$$

onde $c_0 \in \mathbb{R}$*. Tomando* $c_0 = 0$*, segue-se que a outra solução procurada é*

$$y_2 = u(x) y_1(x)$$

$$= -\frac{1}{\ln x} x^{\frac{1}{2}} \ln x$$

$$= -x^{\frac{1}{2}}$$

■

Exercício 2 *A equação diferencial*

$$y'' + 2y' + 2 = 0$$

pode ser reescrita como

$$y'' + 2y' = -2$$

possui ***coeficientes constantes*** *e a equação auxiliar da parte homogênea é dada por*

$$m^2 + 2m = 0$$

cujas soluções são

$$m_1 = 0$$

$$m_2 = -2$$

Ou seja, duas soluções linearmente independentes, para a ***edo*** *homogênea são dadas por*

$$y_1 = 1$$

$$y_2 = e^{-2x}$$

E a sua solução complementar é

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$= c_1 + c_2 e^{-2x}$$

*Com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Usando o **método dos coeficientes a determinar**, considere como proposta de solução a função*

$$y_p = Ax$$

Substituindo na equação dada tem-se

$$y_p'' + 2y_p' = -2 \Leftrightarrow$$

$$0 + 2A = -2 \Leftrightarrow$$

$$A = -1$$

ou seja,

$$y_p = -x$$

Portanto, a solução geral da equação em questão é

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1 + c_2 e^{-2x} - x \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Deseja-se resolver a equação*

$$y''' + y'' - 2y = 0$$

*Observe que trata-se de uma equação diferencial linear de 3ª ordem com **coeficientes constantes** cuja equação auxiliar é dada por*

$$m^3 + m^2 - 2 = 0$$

As soluções desta equação são

$$m_1 = 1$$

$$m_2 = -1 + i$$

$$m_3 = -1 - i$$

Donde segue-se que três soluções linearmente independentes da edo em questão são dadas por

$$y_1 = e^x$$

$$y_2 = e^{-x}\cos x$$

$$y_3 = e^{-x}\operatorname{sen} x$$

e a soluação geral é

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \\ &= c_1 e^x + c_2 e^{-x}\cos x + c_3 e^{-x}\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 4 *Deseja-se resolver a **edo***

$$y'' + y = 2x\operatorname{sen} x$$

Iniciando pela parte homogênea desta equação, observe que sua equação auxiliar é

$$m^2 + 1 = 0$$

cujas soluções são

$$m_1 = i$$

$$m_2 = -i$$

Ou seja,

$$y_1 = \cos x$$

$$y_2 = \operatorname{sen} x$$

e a solução complementar dá-se por

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

*Usando o método dos **coeficientes a determinar** para encontrar uma solução particular, tem-se como proposta de solução a seguinte função*

$$y_p = (Ax^2 + Bx)\operatorname{sen} x + (Cx^2 + Dx)\cos x$$

donde segue-se que

$$\begin{aligned} y_p'' = &\left[2A - 2D - (B + 4C)\,x - Ax^2\right] \operatorname{sen} x + \\ &+ \left[2B + 2C + (4A - D)\,x - Cx^2\right] \cos x \end{aligned}$$

e

$$y_p'' + y_p = 2x\operatorname{sen} x \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\left[2A - 2D - (B + 4C)\,x - Ax^2\right] \operatorname{sen} x + \\ &+ \left[2B + 2C + (4A - D)\,x - Cx^2\right] \cos x + \\ &+ (Ax^2 + Bx)\operatorname{sen} x + \\ &+ (Cx^2 + Dx)\cos x = 2x\operatorname{sen} x \quad \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(2A - 2D - 4Cx)\operatorname{sen} x + \\ &+ (2B + 2C + 4Ax)\cos x = 2x\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left\{ \begin{aligned} 2A - 2D &= 0 \\ -4C &= 2 \\ 2B + 2C &= 0 \\ 4A &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} A &= 0 \\ B &= \frac{1}{2} \\ C &= -\frac{1}{2} \\ D &= 0 \end{aligned} \right.$$

Assim,

$$y_p = \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x^2 \cos x$$

*e a solução geral da **edo** é*

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x^2 \cos x \end{aligned}$$

com $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Para resolver a equação*

$$y'' - 9y = \frac{9x}{e^{3x}}$$

*Observe inicialmente que a parte homogenêa desta **edo** possui equação auxiliar*

$$m^2 - 9 = 0$$

e cujas soluções são

$$\begin{aligned} m_1 &= 3 \\ m_2 &= -3 \end{aligned}$$

Ou seja, duas soluções linearmente independentes, para esta equação, são dadas por

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{3x} \\ y_2 &= e^{-3x} \end{aligned}$$

*Logo, a solução complementar da **edo** é*

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} \end{aligned}$$

*Usando o método da **variação de parâmetros** para determinar uma solução particular da equação diferencial em questão, tem-se que*

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} \\ &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{9x}{e^{3x}} & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & e^{-3x} \\ \frac{9x}{e^{3x}} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} \\ &= 9xe^{-6x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{9x}{e^{3x}} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{3x} & 0 \\ 3e^{3x} & \frac{9x}{e^{3x}} \end{vmatrix} \\ &= 9x \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} \\ &= \frac{9xe^{-6x}}{-6} \\ &= -\frac{3}{2}xe^{-6x} \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} u_1 &= \int -\frac{3}{2}xe^{-6x}dx \\ &= \frac{1}{24}e^{-6x}\left(6x+1\right) + c_3 \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
u_2' &= \frac{W_2}{W} \\
&= \frac{9x}{-6} \\
&= -\frac{3}{2}x
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
u_2 &= \int -\frac{3}{2}x dx \\
&= -\frac{3}{4}x^2 + c_4
\end{aligned}
$$

com $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

Portanto, tomando $c_3 = c_4 = 0$, *uma solução particular da equação diferencial é dada por*

$$
\begin{aligned}
y_p &= u_1 y_1 + u_2 y_2 \\
&= \frac{1}{24} e^{-6x} (6x+1) e^{3x} - \frac{3}{4} x^2 e^{-3x} \\
&= \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}x^2 \right) e^{-3x}
\end{aligned}
$$

e a solução geral é

$$
\begin{aligned}
y &= y_c + y_p \\
&= c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}x^2 \right) e^{-3x} \\
&= c_1 e^{3x} + \left(c_2 + \frac{1}{24} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}x^2 \right) e^{-3x} \\
&= c_1 e^{3x} + \left(c_5 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}x^2 \right) e^{-3x}
\end{aligned}
$$

com $c_1, c_5 \in \mathbb{R}$. ■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma C4

Prof$^{\text{o}}$. Edson

3ª Prova **1º Semestre** **2017**

Data: 17 de Outubro **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Determine o raio de convergência da série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n (n+1)^2} (x+1)^{2n}$$

Problema 2 *Calcule*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1-3s}{s^2+2s+5}\right\}$$

Problema 3 *Encontre a solução geral da equação*

$$y'' - y' + xy = 0$$

Problema 4 *Resolva a edo*

$$xy'' + 5y' + xy = 0$$

Problema 5 *Resolva a edo*

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

com $y(0) = 3$ *e* $y'(0) = 1$.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 3ª Prova **2017**
Data: Domingo, 22 de Outubro **Turma C4**

Exercício 1 *Observe que o termo geral desta série é dado por*

$$a_n = \frac{(-1)^n(x+1)^{2n}}{3^n(n+1)^2}$$

Assim, segue-se que

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(x+1)^{2(n+1)}}{3^{n+1}(n+2)^2}$$

e

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(-1)^{n+1}(x+1)^{2(n+1)}}{3^{n+1}(n+2)^2}\frac{3^n(n+1)^2}{(-1)^n(x+1)^{2n}}\right| \\
&= \left|\frac{(-1)^n(-1)(x+1)^{2n}(x+1)^2}{3^n 3(n+2)^2}\frac{3^n(n+1)^2}{(-1)^n(x+1)^{2n}}\right| \\
&= \left|-\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2(x+1)^2\right| \\
&= \left|-\frac{1}{3}\right|\left|\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\right|\left|(x+1)^2\right| \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2(x+1)^2
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2(x+1)^2 \\
&= \frac{1}{3}(x+1)^2\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{3}(x+1)^2
\end{aligned}$$

Usando o ***teste da razão****, a série dada será absolutamente convergente quando*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

Ou seja, quando

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}(x+1)^2 < 1 &\quad\Rightarrow \\
(x+1)^2 < 3 &\quad\Rightarrow \\
|x+1| < \sqrt{3} &\quad\Rightarrow \\
-\sqrt{3} < x+1 < \sqrt{3} &\quad\Rightarrow \\
-1-\sqrt{3} < x < -1+\sqrt{3} &
\end{aligned}$$

Logo, o raio de convergência é

$$R = \sqrt{3}$$

■

Exercício 2 *Observe inicialmente que o polinômio s^2+2s+5 é irredutível (não possui raízes reais). Assim, completando seu quadrado tem-se*

$$\begin{aligned}
s^2+2s+5 &= s^2+2s+5+1-1 \\
&= (s+1)^2+4
\end{aligned}$$

Além disto, tem-se que

$$\begin{aligned}
\frac{1-3s}{s^2+2s+5} &= \frac{1-3s}{(s+1)^2+4} \\
&= \frac{1-3(s+1-1)}{(s+1)^2+4} \\
&= \frac{1-3(s+1)+3}{(s+1)^2+4} \\
&= \frac{4-3(s+1)}{(s+1)^2+4}
\end{aligned}$$

Logo, aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ e usando a sua linearidade, *obtem-se*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1-3s}{s^2+2s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4-3(s+1)}{(s+1)^2+4}\right\}$$
$$= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+4}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\}$$
$$= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\left.\frac{2}{s^2+4}\right|_{s\to s+1}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\left.\frac{s}{s^2+4}\right|_{s\to s+1}\right\}$$
$$= 2e^t \operatorname{sen} 2t - 3e^t \cos 2t$$

■

Exercício 3 *Observe que $x = 0$ é um ponto ordinário para a **edo***

$$y'' - y' + xy = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$y'' - y' + xy = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0 \quad \Rightarrow$$
$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - a_1 - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$[12pt]2a_2 - a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + a_{n-1}\right]x^n = 0$$

Portanto,

$$\begin{cases} 2a_2 - a_1 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{a_1}{2} \\ a_{n+2} = \dfrac{(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \end{cases} \Rightarrow$$

Tomando $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, tem-se

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = 0$$
$$a_3 = -\frac{1}{6}$$
$$a_4 = -\frac{1}{24}$$
$$a_5 = -\frac{1}{120}$$
$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_1(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots$$
$$= 1 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 + \cdots$$

Tomando agora, $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, tem-se

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$a_3 = \frac{1}{6}$$
$$a_4 = -\frac{1}{24}$$
$$a_5 = -\frac{1}{30}$$
$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_2(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots$$
$$= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots$$

*E a solução geral da **edo** é dada por*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 4 *Observe que $x = 0$ é um ponto singular regular da equação*

$$xy'' + 5y' + xy = 0$$

Deste modo, considere a seguinte proposta de solução segundo o ***método de Frobenius***

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

e, substituindo na equação, tem-se

$$xy'' + 5y' + xy = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + $$
$$+5\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + $$
$$+5\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^r \left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} + \right.$$
$$\left. +5\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}\right] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} + $$
$$+5\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$r(r-1)a_0 x^{-1} + (r+1)ra_1 + $$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} + $$
$$+5ra_0x^{-1} + 5(r+1)a_1 + $$
$$+5\sum_{n=2}^{\infty}(n+r)a_n x^{n-1} + $$
$$+\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(r+4)ra_0x^{-1} + \left(r^2+6r+5\right) a_1 + $$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+r+4)(n+r)a_n + a_{n-2}\right] x^{n-1} = 0$$

Logo,

$$\begin{cases} (r+4)ra_0 = 0 \\ \left(r^2+6r+5\right) a_1 = 0 \\ (n+r+4)(n+r)a_n + a_{n-2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (r+4)r = 0 \text{ ou } a_0 = 0 \\ \left(r^2+6r+5\right) = 0 \text{ ou } a_1 = 0 \\ a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{(n+r+4)(n+r)} \end{cases}$$

1^o Caso: *Suponha $a_0 = 0$ e $a_1 \neq 0$. Então*

$$r^2 + 6r + 5 = 0 \Rightarrow r = -1 \text{ ou } r = -5$$

e, para $r = -1$

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+3)(n-1)}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{5}a_0 = 0 \\ a_3 &= -\frac{1}{12}a_1 \\ a_4 &= -\frac{1}{21}a_2 = 0 \\ a_5 &= \frac{1}{384}a_1 \\ a_6 &= 0 \\ a_7 &= -\frac{1}{23\,040}a_1 \\ &\cdots \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{-1}\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots\right) \\ &= a_1 - \frac{1}{12}a_1x^2 + \frac{1}{384}a_1x^4 - \frac{1}{23\,040}a_1x^6 + \cdots \\ &= a_1\left(1 - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{384}x^4 - \frac{1}{23\,040}x^6 + \cdots\right) \end{aligned}$$

Para $r = -5$,

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n-1)(n-5)}$$

e neste caso, a relação de recorrência não está definida para $n = 5$ indicando que a solução não se enquadra na forma de série de potências.

2^o Caso: *Suponha $a_0 \neq 0$ e $a_1 = 0$. Então*

$$(r+4)r = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } r = -4$$

Para $r = 0$, a relação de recorrência torna-se

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+4)n}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{12}a_0 \\ a_3 &= -\frac{1}{21}a_1 = 0 \\ a_4 &= \frac{1}{384}a_0 \\ a_5 &= -\frac{1}{45}a_3 = 0 \\ a_6 &= -\frac{1}{60}a_4 = -\frac{1}{23\,040}a_0 \\ a_7 &= -\frac{1}{77}a_5 = 0 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} y_2 &= x^0\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots\right) \\ &= a_0 - \frac{1}{12}a_0x^2 + \frac{1}{384}a_0x^4 - \frac{1}{23\,040}a_0x^6 + \cdots \\ &= a_0\left(1 - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{384}x^4 - \frac{1}{23\,040}x^6 + \cdots\right) \\ &= y_1 \end{aligned}$$

Para $r = -4$, a relação de recorrência torna-se

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-4)}$$

que não está definida para $n = 4$, ou seja, a solução para este caso não encontra-se na forma de série de potências. ■

Exercício 5 *Usando a **transformada de Laplace** para resolver o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Obtem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'' - 3y' + 2y\} &= \mathcal{L}\{0\} \quad \Rightarrow \\ \mathcal{L}\{y''\} - 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} &= 0 \qquad \Rightarrow \\ s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - & \\ -3\left(s\mathcal{L}\{y\} - y(0)\right) + 2\mathcal{L}\{y\} &= 0 \end{aligned}$$

Considerando $\mathcal{L}\{y\} = Y$ e lembrando que $y(0) = 3$ e $y'(0) = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} s^2Y - 3s - 1 - 3sY + 9 + 2Y &= 0 \quad \Rightarrow \\ \left(s^2 - 3s + 2\right)Y + 8 - 3s &= 0 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{-8 + 3s}{s^2 - 3s + 2} \\ &= \frac{5}{s-1} - \frac{2}{s-2} \end{aligned}$$

Aplicando agora a transformada inversa,

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s-1} - \frac{2}{s-2}\right\} \\ &= 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \\ &= 5e^t - 2e^{2t} \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma C4

Prof$^{\text{o}}$. Edson

Prova Final | **1$^{\text{o}}$ Semestre** | **2017**

Data: 24 de Outubro | **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Resolvas a equações diferencial:*

$$y' = 10^{x+y}$$

Problema 2 *Encontre todas as soluções possíveis*

$$\frac{dy}{dx} = y\left(xy^3 - 1\right)$$

Problema 3 *Encontre a solução geral da equação*

$$y'' + 2y' + 2 = 0$$

Problema 4 *Encontre a solução geral da equação*

$$y'' - y' + xy = 0$$

Problema 5 *Resolva a edo*

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

com $y(0) = 3$ *e* $y'(0) = 1$.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito Prova Final **2017**
Data: Quarta-feira, 25 de Outubro **Turma C4**

Exercício 1 *Deseja-se resolver a seguinte **edo***

$$y' = 10^{x+y}$$

Para isto observe inicialmente que a equação dada pode ser reescrita como

$$\frac{dy}{dx} = 10^x 10^y$$

*Usando **separação de variáveis**, tem-se,*

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{10^y} &= 10^x dx & \Rightarrow\\
10^{-y}dy &= 10^x dx & \Rightarrow\\
\int 10^{-y}dy &= \int 10^x dx & \Rightarrow\\
\int e^{\ln 10^{-y}}dy &= \int e^{\ln 10^x}dx & \Rightarrow\\
\int e^{-y\ln 10}dy &= \int e^{x\ln 10}dx & \Rightarrow\\
-\frac{e^{-y\ln 10}}{\ln 10} &= \frac{e^{x\ln 10}}{\ln 10} + c_0 & \Rightarrow\\
-\frac{10^{-y}}{\ln 10} &= \frac{10^x}{\ln 10} + c_0 & \Rightarrow\\
10^{-y} &= -10^x \underbrace{-c_0\ln 10}_{c_1} & \Rightarrow\\
10^x + 10^{-y} &= c_1
\end{aligned}$$

onde $c_1 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 2 *Para resolver a **edo***

$$\frac{dy}{dx} = y\left(xy^3 - 1\right),$$

observe que esta equaçãopode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= xy^4 - y & \Leftrightarrow\\
y' + y &= xy^4 & \Leftrightarrow\\
y^{-4}y' + y^{-3} &= x
\end{aligned}$$

Considere

$$u = y^{-3}$$

e observe que

$$u' = -3y^{-4}y'$$

Assim, segue-se que

$$\begin{aligned}
y^{-4}y' + y^{-3} &= x & \Leftrightarrow\\
-\frac{u'}{3} + u &= x & \Leftrightarrow\\
u' - 3u &= -3x
\end{aligned}$$

*Ou seja, a **edo** resultante é linear cujo fator integrante é dado por*

$$\mu(x) = e^{\int -3dx} = e^{-3x+c_0}$$

*Tomando $c_0 = 0$ e multiplicando ambos os lados da **edo** em u tem-se*

$$\begin{aligned}
e^{-3x}u' - 3e^{-3x}u &= -3xe^{-3x} & \Leftrightarrow\\
\tfrac{d}{dx}\left(ue^{-3x}\right) &= -3xe^{-3x} & \Leftrightarrow\\
ue^{-3x} &= -\int 3xe^{-3x}dx & \Leftrightarrow\\
ue^{-3x} &= \tfrac{1}{3}e^{-3x}(3x+1) + c_1 & \Leftrightarrow\\
u(x) &= x + \frac{1}{3} + c_1e^{3x}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
u &= y^{-3} & \Leftrightarrow\\
u &= \frac{1}{y^3} & \Leftrightarrow\\
y^3 &= \frac{1}{u} & \Leftrightarrow\\
y(x) &= u^{-\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

ou seja

$$y(x) = \left(x + \frac{1}{3} + c_1e^{3x}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

com $c_1 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *A equação diferencial*

$$y'' + 2y' + 2 = 0$$

pode ser reescrita como

$$y'' + 2y' = -2$$

possui ***coeficientes constantes*** *e a equação auxiliar da parte homogênea é dada por*

$$m^2 + 2m = 0$$

cujas soluções são

$$m_1 = 0$$

$$m_2 = -2$$

Ou seja, duas soluções linearmente independentes, para a ***edo*** *homogênea são dadas por*

$$y_1 = 1$$

$$y_2 = e^{-2x}$$

E a sua solução complementar é

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 + c_2 e^{-2x} \end{aligned}$$

Com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Usando o* ***método dos coeficientes a determinar****, considere como proposta de solução a função*

$$y_p = Ax$$

Substituindo na equação dada tem-se

$$y_p'' + 2y_p' = -2 \Leftrightarrow$$

$$0 + 2A = -2 \Leftrightarrow$$

$$A = -1$$

ou seja,

$$y_p = -x$$

Portanto, a solução geral da equação em questão é

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1 + c_2 e^{-2x} - x \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Observe que* $x = 0$ *é um ponto ordinário para a* ***edo***

$$y'' - y' + xy = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$y'' - y' + xy = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n -$$

$$-a_1 - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$[12pt] 2a_2 - a_1 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - (n+1) a_{n+1} + a_{n-1} \right] x^n = 0$$

Portanto,

$$\left\{ \begin{array}{r} 2a_2 - a_1 = 0 \\ (n+2)(n+1) a_{n+2} - (n+1) a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_2 & = \dfrac{a_1}{2} \\ a_{n+2} & = \dfrac{(n+1) a_{n+1} - a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \end{array} \right. \Rightarrow$$

Tomando $a_0 = 1$ *e* $a_1 = 0$, *tem-se*

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = 0$$

$$a_3 = -\frac{1}{6}$$

$$a_4 = -\frac{1}{24}$$

$$a_5 = -\frac{1}{120}$$

$$\ldots$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_5x^5 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 + \cdots \end{aligned}$$

Tomando agora, $a_0 = 0$ *e* $a_1 = 1$*, tem-se*

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2} \\ a_3 &= \frac{1}{6} \\ a_4 &= -\frac{1}{24} \\ a_5 &= -\frac{1}{30} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_5x^5 + \cdots \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots \end{aligned}$$

E a solução geral da ***edo*** *é dada por*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Usando a* ***transformada de Laplace*** *para resolver o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Obtem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'' - 3y' + 2y\} &= \mathcal{L}\{0\} \quad \Rightarrow \\ \mathcal{L}\{y''\} - 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} &= 0 \qquad \Rightarrow \\ s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - & \\ -3\left(s\mathcal{L}\{y\} - y(0)\right) + 2\mathcal{L}\{y\} &= 0 \end{aligned}$$

Considerando $\mathcal{L}\{y\} = Y$ *e lembrando que* $y(0) = 3$ *e* $y'(0) = 1$*, tem-se*

$$\begin{aligned} s^2Y - 3s - 1 - 3sY + 9 + 2Y &= 0 \quad \Rightarrow \\ \left(s^2 - 3s + 2\right)Y + 8 - 3s &= 0 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{-8 + 3s}{s^2 - 3s + 2} \\ &= \frac{5}{s-1} - \frac{2}{s-2} \end{aligned}$$

Aplicando agora a transformada inversa,

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s-1} - \frac{2}{s-2}\right\} \\ &= 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \\ &= 5e^t - 2e^{2t} \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma C4

Prof^{o}. Edson

1ª Prova **1º Semestre** **2019**

Data: 28 de Maio **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Resolvas as equações diferenciais:*

a). $x\dfrac{dy}{dx} = (1+y)^2$

b). $y' = xye^{x^2}$, $y(0) = 1$.

Problema 2 *Determine as soluções para a equação*

$$y' + 2y = xe^{-2x}$$

Problema 3 *Encontre todas as soluções possíveis*

$$ydx - xdy = 2x^3 \operatorname{sen} x \, dx$$

Problema 4 *Encontre todas as soluções possíveis*

$$y^2 + x^2y' = xy\,y'$$

Problema 5 *Encontre todas as soluções possíveis*

$$xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof°. Edson

1° Semestre

Gabarito 1ª Prova **2019**
Data: Quarta-feira, 5 de Junho **Turma C4**

Exercício 1

a). *Deseja-se resolver a seguinte **edo***

$$x\frac{dy}{dx} = (1+y)^2$$

*Usando **separação de variáveis**, a equação dada pode ser reescrita como*

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{(1+y)^2} &= \frac{dx}{x} && \Rightarrow\\
\int \frac{dy}{(1+y)^2} &= \int \frac{dx}{x} && \Rightarrow\\
\frac{-1}{1+y} &= \ln|x| + c_1 && \Rightarrow\\
\frac{-1}{\ln|x| + c_1} &= 1 + y && \Rightarrow\\
y &= \quad -1 - \frac{1}{\ln|x| + c_1}
\end{aligned}$$

onde $c_1 \in \mathbb{R}$. $\square$

b). *Deseja-se resolver o seguinte problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' = xye^{x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

*Usando-se **separação de variáveis** para a resolução da **edo**, tem-se*

$$\frac{dy}{y} = xe^{x^2}dx$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y} &= \int xe^{x^2}dx && \Rightarrow\\
\ln|y| &= \frac{e^{x^2}}{2} + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R} && \Rightarrow\\
|y| &= e^{\frac{e^{x^2}}{2}} e^{c_1} && \Rightarrow\\
|y| &= c_2 e^{\frac{e^{x^2}}{2}},\ c_2 \in \mathbb{R}_+^* && \Rightarrow\\
y &= \pm c_2 e^{\frac{e^{x^2}}{2}} && \Rightarrow\\
y &= c_3 e^{\frac{e^{x^2}}{2}}
\end{aligned}$$

onde $c_3 \in \mathbb{R}$.

Usando a condição inicial $y(0) = 1$, *ou seja* $x = 0$ *e* $y = 1$ *tem-se*

$$\begin{aligned}
1 &= c_3 e^{\frac{e^0}{2}} && \Rightarrow\\
1 &= c_3 e^{\frac{1}{2}} && \Rightarrow\\
c_3 &= e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Ou seja, a solução procurada, é dada por

$$\begin{aligned}
y &= e^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{e^{x^2}}{2}} && \Leftrightarrow\\
y &= e^{\frac{e^{x^2}-1}{2}}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exercício 2 *Deseja-se determinar todas as soluções da **edo***

$$y' + 2y = xe^{-2x}$$

Observe que trata-se de uma **edo** *linear de 1ª ordem. Considere*

$$p(x) = 2$$

e observe que

$$\int p(x)dx = 2x + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}$$

Tomando $c_0 = 0$, *tem-se que o fator integrante da equação dada é*

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\int p(x)dx}\\ &= e^{2x}\end{aligned}$$

Assim, multiplicando ambos os lados da edo por $\mu(x)$ *tem-se*

$$\begin{aligned}\mu(x)\left(y' + 2y\right) &= \mu(x)xe^{-2x} &&\Rightarrow\\ \tfrac{d}{dx}\left[\mu(x)y(x)\right] &= e^{2x}xe^{-2x} &&\Rightarrow\\ \mu(x)y(x) &= \int x dx &&\Rightarrow\\ e^{2x}y(x) &= \frac{x^2}{2} + c_0 &&\Rightarrow\\ y(x) &= e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2} + c_0\right)\end{aligned}$$

Com $c_0 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Deseja-se resolver a equação*

$$ydx - xdy = 2x^3 \operatorname{sen} x\, dx$$

Reescrevendo esta equação, tem-se

$$\begin{aligned}\left(y - 2x^3 \operatorname{sen} x\right)dx - xdy = 0 &\quad\Leftrightarrow\\ x\tfrac{dy}{dx} - y = -2x^3 \operatorname{sen} x &\quad\Leftrightarrow\\ \tfrac{dy}{dx} - \tfrac{1}{x}y = -2x^2 \operatorname{sen} x &\end{aligned}$$

Ou seja, a equação dada é ***linear****. Considere*

$$p(x) = -\frac{1}{x}$$

e observe que

$$\int p(x)dx = -\ln|x| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}$$

Tomando $c_0 = 0$, *tem-se que o fator integrante da equação dada é*

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\int p(x)dx}\\ &= e^{-\ln|x|}\\ &= \frac{1}{|x|}\end{aligned}$$

Escolhendo

$$\mu(x) = \frac{1}{x},$$

e multiplicando ambos os lados da edo por $\mu(x)$ *tem-se*

$$\begin{aligned}\mu(x)\left(\tfrac{dy}{dx} - \tfrac{1}{x}y\right) &= \mu(x)\left(-2x^2 \operatorname{sen} x\right) &&\Rightarrow\\ \tfrac{d}{dx}\left[\mu(x)y(x)\right] &= \tfrac{1}{x}\left(-2x^2 \operatorname{sen} x\right) &&\Rightarrow\\ \mu(x)y(x) &= \int -2x \operatorname{sen} x\, dx &&\Rightarrow\\ \tfrac{1}{x}y(x) &= 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + c_0 &&\Rightarrow\\ y(x) &= 2x^2\cos x - 2x\operatorname{sen} x + c_0x\end{aligned}$$

Com $c_0 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 4 *Para resolver a equação*

$$y^2 + x^2y' = xyy'$$

Observe que é possível reescrevê-la da seguinte maneira

$$\begin{aligned}y^2dx + x^2dy &= xydy \quad\Leftrightarrow\\ y^2dx + (x^2 - xy)dy &= 0\end{aligned}$$

Ou seja, a equação dada é homogênea de grau 2. Assim,

$$\begin{aligned}x^2\left[\frac{y^2}{x^2}dx + (1 - \frac{y}{x})dy\right] = 0 &\quad\Leftrightarrow\\ \left(\frac{y}{x}\right)^2 dx + (1 - \frac{y}{x})dy = 0 &\end{aligned}$$

Tomando

$$u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux$$

tem-se

$$dy = xdu + udx$$

e, substuindo na equação

$$
\begin{aligned}
u^2dx + (1-u)(xdu + udx) &= 0 && \Leftrightarrow\\
udx + (1-u)xdu &= 0 && \Leftrightarrow\\
\frac{dx}{x} &= \frac{u-1}{u}du && \Leftrightarrow\\
\int \frac{dx}{x} &= \int \frac{u-1}{u}du && \Leftrightarrow\\
\ln|x| &= u - \ln|u| + c_0 && \Leftrightarrow\\
\ln|x| + \ln|u| &= u + c_0 && \Leftrightarrow\\
\ln|xu| &= u + c_0 && \Leftrightarrow\\
\ln|y| &= \frac{y}{x} + c_0 && \Leftrightarrow\\
|y| &= e^{\frac{y}{x}} e^{c_0} && \Leftrightarrow\\
|y| &= c_1 e^{\frac{y}{x}} && \Leftrightarrow\\
y &= \pm c_1 e^{\frac{y}{x}} && \Leftrightarrow\\
y &= c_2 e^{\frac{y}{x}}
\end{aligned}
$$

com $c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Para resolver a* ***edo***

$$xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0,$$

observe que esta equação pode ser reescrita como

$$
\begin{aligned}
xy' + 2y &= -x^5y^3e^x && \Leftrightarrow\\
y' + \frac{2}{x}y &= -x^4e^xy^3
\end{aligned}
$$

Ou seja, tem-se uma equação de Bernoulli. Assim, considere

$$u = y^{-2}$$

e observe que

$$u' = -2y^{-3}y'$$

e, substituindo na ***edo*** *dada, tem-se*

$$u' - \frac{4}{x}u = 2x^4e^x$$

Ou seja, a ***edo*** *resultante é linear cujo fator integrante é dado por*

$$
\begin{aligned}
\mu(x) &= e^{\int -\frac{4}{x}dx}\\
&= e^{-4\ln|x| + c_0}\\
&= \frac{e^{c_0}}{x^4}
\end{aligned}
$$

Tomando $c_0 = 0$ *e multiplicando ambos os lados da* ***edo*** *em u tem-se*

$$
\begin{aligned}
\mu(x)\left(u' + \frac{4}{x}u\right) &= -2x^4e^x\mu(x) && \Leftrightarrow\\
\frac{d}{dx}\left(\mu(x)u(x)\right) &= -2e^x && \Leftrightarrow\\
\frac{1}{x^4}u(x) &= -2\int e^xdx && \Leftrightarrow\\
\frac{1}{x^4}u(x) &= \ \ 2e^x + c_1 && \Leftrightarrow\\
u(x) &= 2e^xx^4 + c_1x^4
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
u &= y^{-2} && \Leftrightarrow\\
u &= \frac{1}{y^2} && \Leftrightarrow\\
y^2 &= \frac{1}{u} && \Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

$$y(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2e^xx^4 + c_1x^4}}$$

com $c_1 \in \mathbb{R}$. ■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma C4

Prof^{o}. Edson

2ª Prova **1º Semestre** **2019**

Data: 18 de Julho **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Sabendo que $y_1 = x \ln x$ é uma solução da equação diferencial*

$$x^2y'' - xy' + y = 0$$

Determine uma outra solução y_2 desta equação mesma equação que seja linearmente independente.

Problema 2 *Encontre a solução geral da equação*

$$8y''' + y'' = 0$$

Problema 3 *Encontre a solução geral da equação*

$$4y'' + 25y = x \cos x$$

Problema 4 *Sabendo que $y_1 = x$ e $y_2 = x \ln x$ com $x > 0$ são soluções da equação homogênea associada à equação*

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x},$$

Encontre uma solução particular para esta equação.

Problema 5 *Encontre a solução geral da equação*

$$4y'' - 4y' - 3y = \cos 2x$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito 2^a Prova **2019**
Data: Quinta-feira, 15 de Agosto **Turma C4**

Exercício 1 *Observe inicialmente que a equação dada pode ser reescrita como*

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$$

Assim, considerando $p(x) = -\frac{1}{x}$ e, usando o ***método de redução de ordem****, tem-se que a outra solução que deseja-se encontrar é dada por*

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx$$

Perceba que

$$\begin{aligned}\int p(x)dx &= \int \frac{-1}{x}dx \\ &= -\ln|x| + c_0\end{aligned}$$

Tomando $c_0 = 0$ e considerando $|x| = x$ (esta é uma das soluções possíveis e qualquer uma serve aos propósitos deste problema), tem-se que

$$\begin{aligned}y_2 &= y_1 \int \frac{e^{\ln x}}{y_1^2}dx \\ &= x\ln x \int \frac{x}{x^2\ln^2 x}dx \\ &= x\ln x \int \frac{dx}{x\ln^2 x} \\ &= x\ln x \left(\frac{-1}{\ln x} + c_1\right)\end{aligned}$$

Tomando $c_1 = 0$ (novamente, estamos interessados em uma solução qualquer), tem-se

$$y_2 = -x$$

Para verificar que y_1 e y_2 são linearmente independentes poderíamos usar o ***Wronskiano****, mas isto é desnecessário uma vez que o* ***método de redução de ordem*** *garante que a solução y_2 encontrada é linearmente independente de y_1.* ■

Exercício 2 *Sendo*

$$8y''' + y'' = 0$$

a equação diferencial dada, tem-se que sua equação auxiliar é dada por

$$8m^3 + m^2 = 0$$

Ou seja,

$$m^2(8m+1) = 0$$

e, esta equção possui soluções

$$m_1 = 0$$

$$m_2 = 0$$

$$m_3 = \frac{-1}{8}$$

Segue-se disto, que

$$y_1 = e^{m_1 x} = 1$$

$$y_2 = xy_1 = x$$

$$y_3 = e^{m_3 x} = e^{-\frac{x}{8}}$$

Sendo, portanto a solução geral da equação diferencial dada

$$\begin{aligned}y_c &= c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 \\ &= c_1 + c_2x + c_3e^{-\frac{x}{8}}\end{aligned}$$

com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Resolvendo inicialmente a equação homogênea associada, ou seja*

$$4y'' + 25y = 0$$

tem-se como equação auxiliar

$$4m^2 + 25 = 0,$$

cujas soluções são

$$m_1 = \frac{5}{2}i$$

$$m_2 = -\frac{5}{2}i$$

Ou seja,

$$y_1 = \cos\left(\frac{5}{2}x\right)$$

$$y_2 = \mathrm{sen}\left(\frac{5}{2}x\right)$$

Donde segue-se que a solução complementar da ***edo*** *dada é*

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 \cos\left(\frac{5}{2}x\right) + c_2 \mathrm{sen}\left(\frac{5}{2}x\right) \end{aligned}$$

Para encontrar uma solução particular, o ***método do coeficientes a determinar*** *apresenta como proposta de solução a função*

$$y_p = (Ax+B)\cos x + (Cx+D)\mathrm{sen}\, x$$

Onde,

$$y_p' = (Cx+A+D)\cos x + (-Ax+C-B)\mathrm{sen}\, x$$

$$y_p'' = (-Cx-D-2A)\mathrm{sen}\, x + (-Ax-B+2C)\cos x$$

Substituindo na equação dada

$$4y_p'' + 25y_p = x\cos x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 21D - 8A = 0 \\ 21B + 8C = 0 \\ 21A = 1 \\ 21C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A = \dfrac{1}{21} \\ B = 0 \\ C = 0 \\ D = \dfrac{8}{441} \end{array}$$

Ou seja,

$$y_p = \frac{1}{21}x\cos x + \frac{8}{441}\mathrm{sen}\, x$$

E a solução geral da ***edo*** *dada é*

$$\begin{aligned} y_g &= y_c + y_p \\ &= c_1\cos\left(\frac{5}{2}x\right) + c_2\mathrm{sen}\left(\frac{5}{2}x\right) + \frac{1}{21}x\cos x + \\ &\quad + \frac{8}{441}\mathrm{sen}\, x \end{aligned}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 4 *Usando o* ***método da variação de parâmetros****, a solução particular* y_p *que deseja-se encontrar é dada por*

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

Onde

$$u_1' = \frac{W_1}{W}$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W}$$

e

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x & x\ln x \\ 1 & \ln x + 1 \end{vmatrix} \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & x\ln x \\ \dfrac{1}{x} & \ln x + 1 \end{vmatrix} \\ &= -\ln x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} \\ &= 1 \end{aligned}$$

sendo $g(x) = \dfrac{1}{x}$ *(função que torna a equação não homogênea). Assim,*

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{-\ln x}{x} &\Rightarrow\quad u_1 &= -\frac{\ln^2 x}{2} \\ u_2' &= \frac{1}{x} &\Rightarrow\quad u_2 &= \ln x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_p &= -\frac{\ln^2 x}{2}x + \ln x\,(x\ln x) \\ &= \frac{1}{2}x\ln^2 x \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *A equação homogênea associada possui equação auxiliar dada por*

$$4m^2 - 4m - 3 = 0$$

cujas solução são

$$m_1 = -\frac{1}{2}$$

$$m_2 = \frac{3}{2}$$

Ou seja

$$y_1 = e^{-\frac{x}{2}}$$

$$y_2 = e^{\frac{3x}{2}}$$

e a solução complementar da edo dada é

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 e^{-\dfrac{x}{2}} + c_2 e^{\dfrac{3x}{2}} \end{aligned}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Usando o método dos coeficientes a determinar, uma proposta de solução particular é dada por*

$$y_p = A \cos 2x + B \text{sen}\, 2x$$

Donde segue-se que

$$y_p' = -2A \text{sen}\, 2x + 2B \cos 2x$$

$$y_p'' = -4A \cos 2x - 4B \text{sen}\, 2x$$

e, substuindo na equação

$$4y_p'' - 4y_p' - 3y_p = \cos 2x \Rightarrow$$

$$(-18A - 8B) \cos 2x + (-18B + 8A) \,\text{sen}\, 2x = \cos 2x$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 8A - 19B = 0 \\ -8B - 19A = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -\dfrac{19}{425} \\ B = -\dfrac{8}{425} \end{array} \right.$$

Ou seja,

$$y_p = -\frac{19}{425} \cos 2x - \frac{8}{425} \text{sen}\, 2x$$

e a solução geral da equação diferencial dada é

$$\begin{aligned} y_g &= y_c + y_p \\ &= c_1 e^{-\frac{x}{2}} + c_2 e^{\frac{3x}{2}} - \frac{19}{425} \cos 2x - \frac{8}{425} \text{sen}\, 2x \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma C4

Prof^{o}. Edson

3ª Prova **1º Semestre** **2019**

Data: 29 de Agosto **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Determine o intervalo de convergência da série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{(n+3)}$$

Problema 2 *Calcule*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^3+2s}\right\}$$

Problema 3 *Encontre a solução geral da equação*

$$(1+x^2)y'' + xy' + xy = 0$$

Problema 4 *Resolva a* ***edo***

$$(x^2+x)y'' - 2y' - 2y = 0$$

Problema 5 *Resolva a edo*

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

com $y(0) = 1$ *e* $y'(0) = 3.$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 3ª Prova **2019**
Data: Quarta-feira, 4 de Setembro **Turma C4**

Exercício 1 *Observe que o termo geral desta série é dado por*

$$a_n = \frac{2^n(x-3)^n}{n+3}$$

Assim, segue-se que

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}(x-3)^{n+1}}{n+4}$$

e

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{2^{n+1}(x-3)^{n+1}}{n+4}\frac{n+3}{2^n(x-3)^n}\right| \\ &= \left|2(x-3)\frac{n+3}{n+4}\right| \\ &= |2|\left|\frac{n+3}{n+4}\right||x-3| \\ &= 2\left(\frac{n+3}{n+4}\right)|x-3|\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{n+3}{n+4}\right)|x-3| \\ &= 2|x-3|\lim_{n\to+\infty}\frac{n+3}{n+4} \\ &= 2|x-3|\end{aligned}$$

Usando o ***teste da razão****, a série dada será absolutamente convergente quando*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

Ou seja, quando

$$\begin{aligned} 2|x-3| < 1 \quad &\Rightarrow \\ |x-3| < \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \\ -\frac{1}{2} < x-3 < \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \\ 3-\frac{1}{2} < x < 3+\frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \\ \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2} & \end{aligned}$$

Logo, o intervalo de convergência é

$$I = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right),$$

havendo ainda a possibilidade de convergência nos extremos deste intervalo (dispensado de fazer). ■

Exercício 2 *Observe que*

$$\begin{aligned}\frac{s+1}{s^3+2s} &= \frac{s+1}{s(s^2+2)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+2} + \frac{1}{s^2+2}\end{aligned}$$

Logo, aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ e usando a sua linearidade, obtem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^3+2s}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+2} + \frac{1}{s^2+2}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\right\} + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right\} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Observe que $x = 0$ é um ponto ordinário para a* ***edo***

$$(1+x^2)y'' + xy' + xy = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$(1+x^2)y''+xy'+xy=0 \quad \Rightarrow$$
$$(1+x^2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+$$
$$+x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0 \quad \Rightarrow$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0 \quad \Rightarrow$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=0 \quad \Rightarrow$$
$$2a_2+(6a_3+a_1+a_0)\,x+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^n=0 \quad \Rightarrow$$
$$2a_2+(6a_3+a_1+a_0)\,x+$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+n^2a_n+a_{n-1}\right]x^n=0$$

Portanto,

$$\begin{cases} 2a_2=0 \\ 6a_3+a_1+a_0=0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2}+n^2a_n+a_{n-1}=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_2=0 \\ a_3=\dfrac{-a_1-a_0}{6} \\ a_{n+2}=\dfrac{-n^2a_n-a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \end{cases} \Rightarrow$$

Tomando $a_0=1$ e $a_1=0$, tem-se

$$a_2=0$$
$$a_3=-\frac{1}{6}$$
$$a_4=0$$
$$a_5=\frac{3}{40}$$
$$a_6=\frac{1}{180}$$
$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_1(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_5x^5+\cdots$$
$$=1-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{1}{180}x^6\cdots$$

Tomando agora, $a_0=0$ e $a_1=1$, tem-se

$$a_2=0$$
$$a_3=-\frac{1}{6}$$
$$a_4=-\frac{1}{12}$$
$$a_5=\frac{3}{40}$$
$$a_6=\frac{1}{20}$$
$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_2(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_5x^5+\cdots$$
$$=x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{12}x^4+\frac{3}{40}x^5+\frac{1}{20}x^6\cdots$$

*E a solução geral da **edo** é dada por*

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

com $c_1,c_2\in\mathbb{R}$. ■

Exercício 4 *Observe que $x=0$ é um ponto singular regular da equação*

$$(x^2+x)y''-2y'-2y=0$$

*Deste modo, considere a seguinte proposta de solução segundo o **método de Frobenius***

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$$

Segue-se disto, que

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}$$

e, substituindo na equação, tem-se

$$(x^2+x)y''-2y'-2y=0 \quad\Rightarrow$$

$$(x^2+x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}-$$
$$-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0 \quad\Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-1}-$$
$$-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0 \quad\Rightarrow$$

$$x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n}+\right.$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n-1}-$$
$$\left.-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n}\right]=0 \quad\Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n-1}-$$
$$-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n}=0 \quad\Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)-2\right]a_nx^n+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)-2(n+r)\right]a_nx^{n-1}=0 \quad\Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)-2\right]a_nx^n+$$
$$+\sum_{n=-1}^{\infty}\left[(n+r+1)(n+r)-2(n+r+1)\right]a_{n+1}x^{n}=0 \quad\Rightarrow$$

$$(r-3)ra_0x^{-1}+$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[(n+r)(n+r-1)-2\right]a_n+\right.$$
$$\left.+(n+r-2)(n+r+1)a_{n+1}\right\}x^n=0$$

Logo,

$$\begin{cases} (r-3)ra_0=0 \\ \left[(n+r)(n+r-1)-2\right]a_n+ \\ +(n+r-2)(n+r+1)a_{n+1}=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (r-3)r=0 \textit{ ou } a_0=0 \\ a_{n+1}=-\dfrac{(n+r-2)(n+r+1)}{(n+r)(n+r-1)-2}a_n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r=3 \textit{ ou } r=0 \\ a_{n+1}=-\dfrac{(n+r-2)(n+r+1)}{(n+r)(n+r-1)-2}a_n \end{cases}$$

1^o Caso: *Suponha $a_0\neq 0$ e $r=0$*

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=-\frac{(n-2)(n+1)}{n(n-1)-2}a_n \\ &=-\frac{n^2-n-2}{n^2-n-2}a_n \\ &=-a_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0&=1 \\ a_1&=-1 \\ a_2&=1 \\ a_3&=-1 \\ a_4&=1 \\ a_5&=-1 \\ &\cdots \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} y_1&=x^0\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\right) \\ &=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots \\ &=\frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

2^o Caso: *Suponha $a_0\neq 0$ e $r=3$. A relação de recorrência torna-se*

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=-\frac{(n+1)(n+4)}{(n+3)(n+2)-2}a_n \\ &=-\frac{n^2+5n+4}{n^2+5n+4}a_n \\ &=-a_n \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= -1 \\ a_2 &= 1 \\ a_3 &= -1 \\ a_4 &= 1 \\ a_5 &= -1 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} y_2 &= x^3\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\right) \\ &= x^3\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots\right) \\ &= x^3\left(\frac{1}{1+x}\right) \\ &= \frac{x^3}{1+x} \end{aligned}$$

Assim, a solução geral da equação dada é

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 \frac{1}{1+x} + c_2 \frac{x^3}{1+x} \\ &= \frac{1}{1+x}\left(c_1 + c_2 x^3\right) \end{aligned}$$

sendo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Usando a* ***transformada de Laplace*** *para resolver o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

Obtem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'' - 5y' + 6y\} &= \mathcal{L}\{0\} \quad \Rightarrow \\ \mathcal{L}\{y''\} - 5\mathcal{L}\{y'\} + 6\mathcal{L}\{y\} &= 0 \qquad \Rightarrow \\ s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - & \\ -5\left(s\mathcal{L}\{y\} - y(0)\right) + 6\mathcal{L}\{y\} &= 0 \end{aligned}$$

Considerando $\mathcal{L}\{y\} = Y$ *e lembrando que* $y(0) = 1$ *e* $y'(0) = 3$, *tem-se*

$$\begin{aligned} s^2 Y - s - 3 - 5sY + 5 + 6Y &= 0 \quad \Rightarrow \\ \left(s^2 - 5s + 6\right) Y + 2 - s &= 0 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{s-2}{s^2 - 5s + 6} \\ &= \frac{s-2}{(s-3)(s-2)} \\ &= \frac{1}{s-3} \end{aligned}$$

Aplicando agora a transformada inversa,

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} \\ &= e^{3t} \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma C4

Prof^o. Edson

Prova Final **1^o Semestre** **2019**

Data: 03 de Setembro **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Determine as soluções para a equação*

$$y' + 2y = xe^{-2x}$$

Problema 2 *Encontre todas as soluções possíveis*

$$ydx - xdy = 2x^3 \operatorname{sen} x \, dx$$

Problema 3 *Encontre a solução geral da equação*

$$4y'' + 25y = x \cos x$$

Problema 4 *Encontre a solução geral da equação*

$$4y'' - 4y' - 3y = \cos 2x$$

Problema 5 *Encontre a solução geral da equação*

$$(1 + x^2)y'' + xy' + xy = 0$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Profº. Edson

1º Semestre

Gabarito Prova Final **2019**
Data: Quarta-feira, 4 de Setembro **Turma C4**

Exercício 1 *Deseja-se determinar todas as soluções da* ***edo***

$$y' + 2y = xe^{-2x}$$

Observe que trata-se de uma ***edo*** *linear de 1ª ordem. Considere*

$$p(x) = 2$$

e observe que

$$\int p(x)dx = 2x + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}$$

Tomando $c_0 = 0$*, tem-se que o fator integrante da equação dada é*

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\int p(x)dx} \\ &= e^{2x} \end{aligned}$$

Assim, multiplicando ambos os lados da edo por $\mu(x)$ *tem-se*

$$\begin{aligned} \mu(x)\left(y' + 2y\right) &= \mu(x)xe^{-2x} && \Rightarrow \\ \tfrac{d}{dx}\left[\mu(x)y(x)\right] &= e^{2x}xe^{-2x} && \Rightarrow \\ \mu(x)y(x) &= \int x dx && \Rightarrow \\ e^{2x}y(x) &= \frac{x^2}{2} + c_0 && \Rightarrow \\ y(x) &= e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2} + c_0\right) \end{aligned}$$

Com $c_0 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 2 *Deseja-se resolver a equação*

$$y dx - x dy = 2x^3 \operatorname{sen} x\, dx$$

Reescrevendo esta equação, tem-se

$$\begin{aligned} \left(y - 2x^3 \operatorname{sen} x\right) dx - x dy = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ x\frac{dy}{dx} - y = -2x^3 \operatorname{sen} x \quad &\Leftrightarrow \\ \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = -2x^2 \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Ou seja, a equação dada é ***linear****. Considere*

$$p(x) = -\frac{1}{x}$$

e observe que

$$\int p(x)dx = -\ln|x| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}$$

Tomando $c_0 = 0$*, tem-se que o fator integrante da equação dada é*

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\int p(x)dx} \\ &= e^{-\ln|x|} \\ &= \frac{1}{|x|} \end{aligned}$$

Escolhendo

$$\mu(x) = \frac{1}{x},$$

e multiplicando ambos os lados da edo por $\mu(x)$ *tem-se*

$$\begin{aligned} \mu(x)\left(\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y\right) &= \mu(x)\left(-2x^2 \operatorname{sen} x\right) && \Rightarrow \\ \frac{d}{dx}\left[\mu(x)y(x)\right] &= \frac{1}{x}\left(-2x^2 \operatorname{sen} x\right) && \Rightarrow \\ \mu(x)y(x) &= \int -2x \operatorname{sen} x\, dx && \Rightarrow \\ \frac{1}{x}y(x) &= 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + c_0 && \Rightarrow \\ y(x) &= 2x^2\cos x - 2x\operatorname{sen} x + c_0 x \end{aligned}$$

Com $c_0 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Resolvendo inicialmente a equação homogênea associada, ou seja*

$$4y'' + 25y = 0$$

tem-se como equação auxiliar

$$4m^2 + 25 = 0,$$

cujas soluções são

$$m_1 = \frac{5}{2}i$$

$$m_2 = -\frac{5}{2}i$$

Ou seja,

$$y_1 = \cos\left(\frac{5}{2}x\right)$$

$$y_2 = \text{sen}\left(\frac{5}{2}x\right)$$

Donde segue-se que a solução complementar da ***edo*** *dada é*

$$\begin{aligned} y &= c_1y_1 + c_2y_2 \\ &= c_1\cos\left(\frac{5}{2}x\right) + c_2\text{sen}\left(\frac{5}{2}x\right) \end{aligned}$$

Para encontrar uma solução particular, o ***método do coeficientes a determinar*** *apresenta como proposta de solução a função*

$$y_p = (Ax+B)\cos x + (Cx+D)\text{sen}\, x$$

Onde,

$$y_p' = (Cx+A+D)\cos x + (-Ax+C-B)\text{sen}\, x$$

$$y_p'' = (-Cx-D-2A)\text{sen}\, x + (-Ax-B+2C)\cos x$$

Substituindo na equação dada

$$4y_p'' + 25y_p = x\cos x \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned} 21D - 8A &= 0 \\ 21B + 8C &= 0 \\ 21A &= 1 \\ 21C &= 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow \begin{aligned} A &= \frac{1}{21} \\ B &= 0 \\ C &= 0 \\ D &= \frac{8}{441} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$y_p = \frac{1}{21}x\cos x + \frac{8}{441}\text{sen}\, x$$

E a solução geral da ***edo*** *dada é*

$$\begin{aligned} y_g &= y_c + y_p \\ &= c_1\cos\left(\frac{5}{2}x\right) + c_2\text{sen}\left(\frac{5}{2}x\right) + \frac{1}{21}x\cos x + \\ &+ \frac{8}{441}\text{sen}\, x \end{aligned}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 4 *A equação homogênea associada possui equação auxiliar dada por*

$$4m^2 - 4m - 3 = 0$$

cujas solução são

$$m_1 = -\frac{1}{2}$$

$$m_2 = \frac{3}{2}$$

Ou seja

$$y_1 = e^{-\frac{x}{2}}$$

$$y_2 = e^{\frac{3x}{2}}$$

e a solução complementar da edo dada é

$$\begin{aligned} y_c &= c_1y_1 + c_2y_2 \\ &= c_1e^{-\dfrac{x}{2}} + c_2e^{\dfrac{3x}{2}} \end{aligned}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Usando o método dos coeficientes a determinar, uma proposta de solução particular é dada por*

$$y_p = A\cos 2x + B\text{sen}\, 2x$$

Donde segue-se que

$$y_p' = -2A\text{sen}\, 2x + 2B\cos 2x$$

$$y_p'' = -4A\cos 2x - 4B\text{sen}\, 2x$$

e, substuindo na equação

$$4y_p'' - 4y_p' - 3y_p = \cos 2x \Rightarrow$$

$$(-18A - 8B)\cos 2x + (-18B + 8A)\,\text{sen}\, 2x = \cos 2x$$

$$\left\{\begin{aligned} 8A - 19B &= 0 \\ -8B - 19A &= 1 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} A &= -\frac{19}{425} \\ B &= -\frac{8}{425} \end{aligned}\right.$$

Ou seja,

$$y_p = -\frac{19}{425}\cos 2x - \frac{8}{425}\text{sen}\, 2x$$

e a solução geral da equação diferencial dada é

$$\begin{aligned} y_g &= y_c + y_p \\ &= c_1e^{-\frac{x}{2}} + c_2e^{\frac{3x}{2}} - \frac{19}{425}\cos 2x - \frac{8}{425}\text{sen}\, 2x \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Observe que $x = 0$ é um ponto ordinário para a* ***edo***

$$(1+x^2)y''+xy'+xy=0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

Segue-se disto, que

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned}
(1+x^2)y''+xy'+xy=0 \quad &\Rightarrow\\
(1+x^2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+&\\
+x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0 \quad &\Rightarrow\\
\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+&\\
+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0 \quad &\Rightarrow\\
\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+&\\
+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=0 \quad &\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2a_2+(6a_3+a_1+a_0)\,x+&\\
+\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+&\\
+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^n=0 \quad &\Rightarrow\\
2a_2+(6a_3+a_1+a_0)\,x+&\\
\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+n^2a_n+a_{n-1}\right]x^n=0&
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left\{\begin{aligned}2a_2&=0\\ 6a_3+a_1+a_0&=0\\ (n+2)(n+1)a_{n+2}+n^2a_n+a_{n-1}&=0\end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned}&a_2=0\\ &a_3=\frac{-a_1-a_0}{6}\\ &a_{n+2}=\frac{-n^2a_n-a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}\end{aligned}\right. \Rightarrow$$

Tomando $a_0=1$ e $a_1=0$, tem-se

$$\begin{aligned}a_2&=0\\ a_3&=-\frac{1}{6}\\ a_4&=0\\ a_5&=\frac{3}{40}\\ a_6&=\frac{1}{180}\\ &\dots\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}y_1(x)&=a_0+a_1x+\cdots+a_5x^5+\cdots\\ &=1-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{1}{180}x^6\cdots\end{aligned}$$

Tomando agora, $a_0=0$ e $a_1=1$, tem-se

$$\begin{aligned}a_2&=0\\ a_3&=-\frac{1}{6}\\ a_4&=-\frac{1}{12}\\ a_5&=\frac{3}{40}\\ a_6&=\frac{1}{20}\\ &\dots\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}y_2(x)&=a_0+a_1x+\cdots+a_5x^5+\cdots\\ &=x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{12}x^4+\frac{3}{40}x^5+\frac{1}{20}x^6\cdots\end{aligned}$$

E a solução geral da ***edo*** *é dada por*

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

com $c_1,c_2\in\mathbb{R}$. ■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma C4

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1ª Prova **1º Semestre** **2019**

Data: 28 de Maio **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Resolva a equação*

$$2(1+x)(1+y)y' + (y+2)^2 = 0$$

Problema 2 *Resolva a equação*

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = 2 + x,\ y(1) = 1$$

Problema 3 *Resolva a equação*

$$\left(4xy + \frac{1}{x}\right)dx + \left(2x^2 - \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

Problema 4 *Resolva a equação*

$$y' = \frac{2x^2 + y^2}{xy}$$

Problema 5 *Resolva a equação*

$$\frac{dy}{dx} + 2y\,\mathrm{sen}\,x = 2y^2\mathrm{sen}\,x$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 1ª Prova **2020**
Data: Quarta-feira, 31 de Março de 2021 **Turma C4**

Exercício 1 *Deseja-se resolver a seguinte* ***edo***

$$2(1+x)(1+y)y' + (y+2)^2 = 0$$

Usando ***separação de variáveis****, a equação dada pode ser reescrita como*

$$\begin{aligned}
2(1+x)(1+y)\frac{dy}{dx} &= -(y+2)^2 && \Rightarrow \\
2\frac{(1+y)}{(y+2)^2}dy &= -\frac{1}{1+x}dx && \Rightarrow \\
2\int \frac{1+y}{(y+2)^2}dy &= -\int \frac{1}{1+x}dx && \Rightarrow \\
\ln|y+2| + \frac{1}{y+2} &= -\ln|1+x| + c_1
\end{aligned}$$

onde $c_1 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 2 *Deseja-se resolver o seguinte problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x^2\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 2 + x \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Observe que a equação dada pode ser reescrita como

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{2+x}{x^2}$$

Ou seja,tem-se uma ***edo linear****, com*

$$\begin{aligned}
P(x) &= \frac{2}{x} \\
f(x) &= \frac{2+x}{x^2}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int P(x)dx &= \int \frac{2}{x}dx \\
&= 2\ln|x| + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

e, tomando $c_1 = 0$*, tem-se*

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= e^{\int P(x)dx} \\
&= e^{2\ln|x|} \\
&= e^{\ln|x|^2} \\
&= |x|^2 \\
&= x^2
\end{aligned}$$

Além disto, a solução desta ***edo*** *é dada por*

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{x^2}\int x^2\frac{2+x}{x^2}dx \\
&= \frac{1}{x^2}\int (2+x)\,dx \\
&= \frac{1}{x^2}\left(2x + \frac{x^2}{2} + c\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{x} + \frac{c}{x^2}
\end{aligned}$$

onde $c \in \mathbb{R}$.

Usando a condição inicial $y(1) = 1$*, ou seja* $x = 1$ *e* $y = 1$ *tem-se*

$$\begin{aligned}
y(1) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{1} + \frac{c}{1} && \Rightarrow \\
1 &= \frac{5}{2} + c && \Rightarrow \\
c &= \ \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Ou seja, a solução procurada, é dada por

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x} + \frac{3}{2x^2}$$

■

Exercício 3 *Deseja-se determinar todas as soluções da* ***edo***

$$\left(4xy + \frac{1}{x}\right)dx + \left(2x^2 - \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

Considere

$$M(x,y) = 4xy + \frac{1}{x}$$

$$N(x,y) = 2x^2 - \frac{1}{y}$$

e observe que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 4x$$

Ou seja, a ***edo*** *dada é* ***exata****. Para encontrar as soluções desta equação é necessário resolver o seguinte sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = M \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4xy + \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 - \dfrac{1}{y} \end{cases}$$

Integrando em relação à x a primeira equação sistema, obtem-se

$$f(x,y) = 2x^2y + \ln|x| + k(y)$$

Donde segue-se que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + k'(y)$$

Comparando este resultado com a segunda equação do sistema, tem-se que

$$k'(y) = -\frac{1}{y} \Leftrightarrow k(y) = -\ln|y| + c_1$$

com $c_1 \in \mathbb{R}$. *Assim,*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2x^2y + \ln|x| + k(y) \\ &= 2x^2y + \ln|x| - \ln|y| + c_1 \\ &= 2x^2y + \ln\left|\frac{x}{y}\right| + c_1 \end{aligned}$$

e a solução da edo em questão é dada por

$$f(x,y) = c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

Ou seja,

$$2x^2y + \ln\left|\frac{x}{y}\right| + c_1 = c_2$$

$$2x^2y + \ln\left|\frac{x}{y}\right| = c$$

Com $c \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 4 *Deseja-se resolver a equação*

$$y' = \frac{2x^2 + y^2}{xy}$$

Reescrevendo esta equação, tem-se

$$\begin{aligned} xy\frac{dy}{dx} &= 2x^2 + y^2 & \Leftrightarrow \\ \left(2x^2 + y^2\right) dx - xydy &= 0 & \Leftrightarrow \\ x^2\left\{\left[2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] dx - \frac{y}{x}dy\right\} &= 0 & \Leftrightarrow \\ \left[2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] dx - \frac{y}{x}dy &= 0 \end{aligned}$$

Considere

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow \begin{cases} y = ux \\ dy = x\,du + u\,dx \end{cases}$$

Assim, a equação pode ser rescrita como

$$\begin{aligned} \left(2 + u^2\right) dx - u\left(x\,du + u\,dx\right) &= 0 & \Leftrightarrow \\ \left(2 + u^2 - u^2\right) dx - ux\,du &= 0 & \Leftrightarrow \\ 2dx - ux\,du &= 0 & \Leftrightarrow \\ \frac{2}{x}dx &= u\,du & \Leftrightarrow \\ \int \frac{2}{x}dx &= \int u\,du & \Leftrightarrow \\ 2\ln|x| &= \frac{u^2}{2} + c_0 \end{aligned}$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$.*Trazendo de volta a variável y, tem-se*

$$\begin{aligned} 4\ln|x| = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + c_0 \quad \Leftrightarrow \\ \left(4\ln|x| - c_0\right) x^2 - y^2 = 0 \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Observe que a* ***edo***

$$\frac{dy}{dx} + 2y\,\text{sen}\,x = 2y^2\text{sen}\,x,$$

é uma ***equação de Bernoulli*** *e pode ser reescrita como*

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{y}\,\text{sen}\,x = 2\text{sen}\,x$$

Considere

$$u = \frac{1}{y^{-1}} = y^{-1}$$

e observe que

$$\frac{du}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$$
$$= -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}$$

*e, substituindo na **edo** dada, tem-se*

$$\frac{du}{dx} - 2\text{sen}\, x\, u = -2\text{sen}\, x$$

*Ou seja, a **edo** resultante é **linear**, com*

$$P(x) = -2\text{sen}\, x$$
$$f(x) = -2\text{sen}\, x$$

e

$$\int P(x)dx = \int -2\text{sen}\, x dx$$
$$= 2\cos x + c_0$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$. Tomando $c_0 = 0$, o fator integrante desta equação será então

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$
$$= e^{2\cos x}$$

Além disto, segue-se que a

$$u(x) = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x) f(x) dx$$
$$= \frac{1}{e^{2\cos x}}\int -2e^{2\cos x}\text{sen}\, x\, dx$$
$$= \frac{1}{e^{2\cos x}}\left(e^{2\cos x} + c_1\right)$$
$$= \frac{c_1}{e^{2\cos x}} + 1$$

com $c_1 \in \mathbb{R}$. Trazendo a variável y de volta, tem-se

$$\frac{1}{y} = \frac{c_1}{e^{2\cos x}} + 1$$

Ou seja,

$$y(x) = \frac{e^{2\cos x}}{c_1 + e^{2\cos x}}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma C4

Prof^{o}. Edson

2ª Prova **1º Semestre** **2020**

Data: 04 de Maio de 2021 **Duração: 16:00 - 19:00**

Problema 1 *Sabendo que a função* $y_1 = \frac{1}{x}$ *é uma solução da equação*

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0$$

Encontre outra solução desta ***edo****, que seja linearmente independente de* y_1.

Problema 2 *Encontre a solução geral da equação*

$$y'' + 3y' + 3y = 0$$

Problema 3 *Encontre a solução geral da equação*

$$y'' - 4y = 3e^{2x} + 4e^{-2x}$$

Problema 4 *Encontre uma solução particular da equação*

$$y'' - 2y' + y = \frac{2e^x}{x}$$

Problema 5 *Encontre a solução geral da equação*

$$x^2y'' + xy' + 4y = 0$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 2ª Prova **2020**
Data: Terça-feira, 15 de Junho de 2021 **Turma C4**

Exercício 1 *Observe que a equação dada pode ser reescrita como*

$$y'' + \frac{3}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$$

Ou seja,

$$P(x) = \frac{3}{x}$$

Sabendo que

$$y_1 = \frac{1}{x}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}\mu(x) &= -\int P(x)dx \\ &= -\int \frac{3}{x}dx \\ &= -3\ln|x| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Disto segue-se que

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \frac{e^{\mu(x)}}{y_1^2} \\ &= \frac{e^{-3\ln|x|+c_0}}{\frac{1}{x^2}} \\ &= e^{c_0}e^{\ln|x|^{-3}}x^2 \\ &= e^{c_0}\,|x|^{-3}\,x^2 \\ &= e^{c_0}\frac{x^2}{|x|^3} \\ &= \pm e^{c_0}\frac{1}{x} \\ &= c_1\frac{1}{x},\ c_1 \in \mathbb{R}_*\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}u(x) &= \int \eta(x)dx \\ &= \int c_1\frac{1}{x}dx \\ &= c_1\ln x + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Tomando $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$, segue-se que,

$$\begin{aligned}y_2(x) &= y_1(x)u(x) \\ &= \frac{\ln x}{x}\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *A **equação característica** da **edo** em questão é dada por*

$$m^2 + 3m + 3 = 0,$$

cuja solução é

$$m_1 = -\tfrac{3}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$m_2 = -\tfrac{3}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

Ou seja,

$$\alpha = -\tfrac{3}{2}$$

$$\beta = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

*e, o **conjunto fundamental de soluções** é*

$$\begin{aligned}y_1 &= e^{\alpha x}\cos\beta x \\ &= e^{-\frac{3x}{2}}\cos\tfrac{\sqrt{3}x}{2} \\ y_2 &= e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \\ &= e^{-\frac{3x}{2}}\operatorname{sen}\tfrac{\sqrt{3}x}{2}\end{aligned}$$

*Logo, a **solução geral** da equação*

$$\begin{aligned}y &= c_1y_1 + c_2y_2 \\ &= c_1e^{-\frac{3x}{2}}\cos\tfrac{\sqrt{3}x}{2} + c_2e^{-\frac{3x}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}x}{2} \\ &= e^{-\frac{3x}{2}}\left(c_1\cos\tfrac{\sqrt{3}x}{2} + c_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Observe que a* ***parte homogênea*** *da* ***edo*** *possui* ***equação característica***

$$m^2 - 4 = 0$$

Ou seja,

$$m_1 = 2$$

$$m_2 = -2$$

e

$$y_1 = e^{2x}$$

$$y_2 = e^{-2x}$$

com ***solução complementar***

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} \end{aligned}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Para ***solução particular*** *da equação dada, considere a seguinte proposta*

$$y_p = x\left(Ae^{2x} + Be^{-2x}\right)$$

Disto segue-se que

$$\begin{aligned} y_p' &= Ae^{2x} + Be^{-2x} + 2x\left(Ae^{2x} - Be^{-2x}\right) \\ v &= (2x+1)\,Ae^{2x} + (-2x+1)\,Be^{-2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p'' &= 2Ae^{2x} + 2\,(2x+1)\,Ae^{2x} - 2Be^{-2x} - \\ &\quad - 2\,(-2x+1)\,Be^{-2x} \\ &= 4\,(x+1)\,Ae^{2x} + 4\,(x-1)\,Be^{-2x} \end{aligned}$$

Substituindo na equação tem-se

$$\begin{aligned} y_p'' - 4y_p = 3e^{2x} + 4e^{-2x} \quad &\Leftrightarrow \\ 4\,(x+1)\,Ae^{2x} + 4\,(x-1)\,Be^{-2x} - \\ -4x\left(Ae^{2x} + Be^{-2x}\right) = 3e^{2x} + 4e^{-2x} \quad &\Leftrightarrow \\ 4Ae^{2x} - 4Be^{-2x} = 3e^{2x} + 4e^{-2x} \end{aligned}$$

Ou seja

$$A = \tfrac{3}{4}$$

$$B = -1$$

e

$$y_p = x\left(\frac{3}{4}e^{2x} - e^{-2x}\right)$$

A ***solução geral*** *é, portanto*

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + x\left(\frac{3}{4}e^{2x} - e^{-2x}\right) \\ &= \left(c_1 + \frac{3}{4}x\right)e^{2x} + (c_2 - x)\,e^{-2x} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *A* ***equação característica*** *da parte homogênea da* ***edo*** *em questão é dada por*

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 0$$

ou seja

$$m_1 = m_2 = 1$$

e, o conjunto fundamental de soluções é

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{m_1 x} \\ &= e^x \\ y_2 &= xe^{m_1 x} \\ &= xe^x \end{aligned}$$

Usando o ***método da variação de parâmetros****, tem-se que*

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)\,e^x \end{vmatrix} \\ &= e^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{2e^x}{x} & (x+1)\,e^x \end{vmatrix} \\ &= -2e^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{2e^x}{x} \end{vmatrix} \\ &= \frac{2e^{2x}}{x} \end{aligned}$$

e,

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{-2e^{2x}}{e^{2x}} = -2$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{\frac{2e^{2x}}{x}}{e^{2x}} = \frac{2}{x}$$

Ou seja

$$u_1 = -2x + c_0$$

$$u_2 = 2\ln|x| + c_1$$

*com $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. Considerando $c_0 = c_1 = 0$ e $x > 0$, segue-se que, uma **solução particular** da equação é*

$$\begin{aligned} y_p &= y_1u_1 + y_2u_2 \\ &= -2xe^x + 2xe^x \ln x \\ &= 2xe^x (\ln x - 1) \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Considere a função*

$$y = x^m$$

*como **proposta de solução** para a equação dada. Observe que*

$$y' = mx^{m-1}$$

$$y'' = (m-1)mx^{m-2}$$

Substituindo na equação, tem-se

$$\begin{aligned} x^2y'' + xy' + 4y = 0 &\quad \Leftrightarrow \\ x^2(m-1)mx^{m-2} + xmx^{m-1} + 4x^m = 0 &\quad \Leftrightarrow \\ (m-1)mx^m + mx^m + 4x^m = 0 &\quad \Leftrightarrow \\ \left(m^2 + 4\right) x^m = 0 &\quad \Leftrightarrow \\ m^2 + 4 = 0 & \end{aligned}$$

e,

$$m_1 = 2\mathbf{i}$$

$$m_2 = -2\mathbf{i}$$

Ou seja

$$\alpha = 0$$

$$\beta = 2$$

Portanto

$$y_1 = \cos(2\ln x)$$

$$y_2 = \mathrm{sen}\,(2\ln x)$$

*e a **solução geral** é*

$$\begin{aligned} y &= c_1y_1 + c_2y_2 \\ &= c_1 \cos(2\ln x) + c_2\mathrm{sen}\,(2\ln x) \end{aligned}$$

com $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ ■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma C4

Prof^{o}. Edson

3ª Prova | **1º Semestre** | **2020**

Data: 15 de Junho de 2021 | **Duração: 16:00 - 19:00**

Problema 1 *Determine para quais valores de k a série* ***converge***

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k 3^{-n}$$

Problema 2 *Determine o* ***raio de convergência*** *da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{64^n}$

Problema 3 *Encontre a* ***Série de Taylor*** *para a função f em torno de $x_0 = 3$ sabendo que $f(3) = 4$ e*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$$

Problema 4 *Encontre a* ***solução geral*** *da* ***edo***

$$y'' + x^2 y' + xy = 0$$

Problema 5 *Encontre* ***uma solução*** *da equação*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 3ª Prova **2020**
Data: Sexta-feira, 25 de Junho **Turma C4**

Exercício 1 *Observe que o termo geral desta série é dado por*

$$a_n = n^k 3^{-n}$$

Assim, segue-se que

$$a_{n+1} = (n+1)^k 3^{-n-1}$$

e

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(n+1)^k 3^{-n-1}}{n^k 3^{-n}}\right| \\ &= \left|\frac{(n+1)^k 3^{-n} 3^{-1}}{n^k 3^{-n}}\right| \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^k\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^k \\ &= \frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^k \\ &= \frac{1}{3} < 1\end{aligned}$$

*Logo, pelo **teste da razão**, a série dada será absolutamente convergente para qualquer valor de $k \in \mathbb{R}$.* ■

Exercício 2 *O termo geral desta série é dado por*

$$a_n = \frac{x^{3n+1}}{64^n}$$

Assim, segue-se que

$$a_{n+1} = \frac{x^{3n+4}}{64^{n+1}}$$

e

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{x^{3n+4}}{64^{n+1}}\frac{64^n}{x^{3n+1}}\right| \\ &= \left|\frac{x^3}{64}\right| \\ &= \frac{|x|^3}{64}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^3}{64} \\ &= \frac{|x|^3}{64}\end{aligned}$$

*Usando o **teste da razão**, a série dada será **absolutamente convergente** quando*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \quad &\Leftrightarrow \\ \frac{|x|^3}{64} < 1 \quad &\Leftrightarrow \\ |x|^3 < 64 \quad &\Leftrightarrow \\ |x| < 4\end{aligned}$$

*Ou seja, o **raio de convergência** é 4.* ■

Exercício 3 *Sabe-se que*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n}$$

Logo,

$$\begin{aligned}f(x) &= \int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n} \\ &= c + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{n+1}}{n(n+1)}\end{aligned}$$

Além disso, é dado que

$$f(3) = 4$$

Ou seja

$$c = 4$$

Donde segue-se, finalmente que

$$f(x) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{n+1}}{n(n+1)}$$

■

Exercício 4 *Observe que $x = 0$ é um ponto ordinário para a **edo***

$$y'' + x^2 y' + xy = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned}
y'' + x^2 y' + xy = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + & \\
+ x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=-1}^{\infty} (n+3)(n+2) a_{n+3} x^{n+1} + & \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \quad &\Rightarrow \\
2a_2 + (6a_3 + a_0)\, x + & \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} (n+3)(n+2) a_{n+3} x^{n+1} & \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \quad &\Rightarrow \\
2a_2 + (6a_3 + a_0)\, x + & \\
\sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+3)(n+2) a_{n+3} + (n+1)\, a_n \right] x^{n+1} = 0 &
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left\{ \begin{aligned} 2a_2 &= 0 \\ 6a_3 + a_0 &= 0 \\ (n+3)(n+2) a_{n+3} + (n+1)\, a_n &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_2 &= 0 \\ a_3 &= \frac{-a_0}{6} \\ a_{n+3} &= \frac{(n+1)\, a_n}{(n+3)(n+2)} \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

Tomando $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} a_2 &= 0 \\ a_3 &= -\frac{1}{6} \\ a_4 &= 0 \\ a_5 &= 0 \\ a_6 &= -\frac{1}{45} \\ a_9 &= -\frac{7}{3240} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{45} x^6 - \frac{7}{3240} x^9 + \cdots \end{aligned}$$

Tomando agora, $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} a_2 &= 0 \\ a_3 &= 0 \\ a_4 &= -\frac{1}{6} \\ a_5 &= 0 \\ a_6 &= 0 \\ a_7 &= -\frac{5}{252} \\ a_{10} &= -\frac{1}{567} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= x - \frac{1}{6} x^4 - \frac{5}{252} x^7 - \frac{1}{567} x^{10} + \cdots \end{aligned}$$

*E a solução geral da **edo** é dada por*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Observe que* $x = 0$ *é um ponto singular regular da equação*

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - 1\right) y = 0$$

*Deste modo, considere a seguinte proposta de solução segundo o **método de Frobenius***

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

e, substituindo na equação, tem-se

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - 1\right) y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} + $$
$$+ x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} + \left(x^2 - 1\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^r \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^n + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^n +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$r(r-1) a_0 + r(r+1) a_1 x +$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^n +$$
$$r a_0 + (1+r) a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+r) a_n x^n +$$
$$-a_0 - a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(r^2 - 1\right) a_0 + r\,(r+2)\, a_1 x +$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left[(n+r)^2 - 1 \right] a_n + a_{n-2} \right\} x^n = 0$$

Logo,

$$\begin{cases} \left(r^2 - 1\right) a_0 = 0 \\ r\,(r+2)\, a_1 = 0 \\ \left[(n+r)^2 - 1\right] a_n + a_{n-2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r^2 - 1 = 0 \text{ ou } a_0 = 0 \\ r\,(r+2) = 0 \text{ ou } a_1 = 0 \\ a_n = \dfrac{-a_{n-2}}{(n+r)^2 - 1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r = 1 \text{ ou } r = -1 \\ a_1 = 0 \\ a_n = \dfrac{-a_{n-2}}{(n+r)^2 - 1} \end{cases}$$

Perceba que, sendo $a_1 = 0$*, segue-se da **relação de recorrência**, que*

$$a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = a_{2n+1} = 0$$

Supondo $a_0 \neq 0$ *e* $r = 1$*, tem-se*

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{(n+1)^2 - 1} = \frac{-a_{n-2}}{n\,(n+2)}$$

e,

$$a_0 = 1$$
$$a_2 = -\frac{1}{8}$$
$$a_4 = \frac{1}{192}$$
$$a_6 = -\frac{1}{9216}$$
$$\cdots$$

Ou seja

$$y_1 = x\left(a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \cdots\right)$$
$$= x - \frac{1}{8} x^3 + \frac{1}{192} x^5 - \frac{1}{9216} x^7 + \cdots$$

*é **uma solução** da equação dada.* ■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma C4

Prof$^{\text{o}}$. Edson

Prova Final **1$^{\text{o}}$ Semestre** **2020**

Data: 23 de Junho de 2021 **Duração: 16:00 - 19:00**

Problema 1 *Determine as soluções para a equação*

$$y' + 4xy = x^3 e^{x^2}$$

Problema 2 *Encontre a solução geral da equação*

$$y''' + y'' - 2y = 0$$

Problema 3 *Sabendo que* $y_1 = x$ *e* $y_2 = x \ln x$ *com* $x > 0$ *são soluções da equação homogênea associada à equação*

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x},$$

Encontre uma solução particular para esta equação.

Problema 4 *Encontre a solução geral da equação*

$$y'' - y' + xy = 0$$

Problema 5 *Determine o intervalo de convergência da série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{(n+3)}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Profº. Edson

1º Semestre

Gabarito Prova Final **2020**
Data: Quarta-feira, 23 de Junho de 2021 **Turma C4**

Exercício 1 *Deseja-se determinar todas as soluções da* ***edo***

$$y' + 4xy = x^3 e^{x^2}$$

Observe que trata-se de uma **edo** *linear de 1ª ordem, cujo fator integrante é dado por*

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\int 4x dx} \\ &= e^{2x^2 + c_1}\end{aligned}$$

Desta forma, considerando $c_1 = 0$, segue-se que

$$\begin{aligned}[\mu(x)y(x)]' &= \mu'(x)y(x) + \mu(x)y'(x) \\ &= 4xe^{2x^2}y(x) + e^{2x^2}y'(x) \\ &= e^{2x^2}\left(4xy(x) + y'(x)\right)\end{aligned}$$

Ou seja, multiplicando-se ambos os lados da **edo** *dada por $\mu(x)$, tem-se*

$$\begin{aligned}e^{2x^2}(4xy + y') &= e^{2x^2}x^3e^{x^2} && \Rightarrow \\ [\mu\, y]' &= x^3e^{3x^2} && \Rightarrow \\ \mu\, y &= \int x^3 e^{3x^2} dx && \Rightarrow \\ \mu\, y &= e^{3x^2}\left(\tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{1}{18}\right) + c_2 && \Rightarrow \\ y &= \frac{1}{\mu(x)}\left[e^{3x^2}\left(\tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{1}{18}\right) + c_2\right] && \Rightarrow \\ y &= \frac{1}{e^{2x^2}}\left[e^{3x^2}\left(\tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{1}{18}\right) + c_2\right] && \Rightarrow \\ y &= e^{x^2}\left(\tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{1}{18}\right) + c_2 e^{-2x^2}\end{aligned}$$

Com $c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 2 *Deseja-se resolver a equação*

$$y''' + y'' - 2y = 0$$

Observe que trata-se de uma equação diferencial linear de 3ª ordem com ***coeficientes constantes*** *cuja equação auxiliar é dada por*

$$m^3 + m^2 - 2 = 0$$

As soluções desta equação são

$$m_1 = 1$$
$$m_2 = -1 + i$$
$$m_3 = -1 - i$$

Donde segue-se que três soluções linearmente independentes da edo em questão são dadas por

$$y_1 = e^x$$
$$y_2 = e^{-x}\cos x$$
$$y_3 = e^{-x}\operatorname{sen} x$$

e a soluação geral é

$$\begin{aligned}y &= c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 \\ &= c_1e^x + c_2e^{-x}\cos x + c_3e^{-x}\operatorname{sen} x\end{aligned}$$

com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Usando o* ***método da variação de parâmetros****, a solução particular y_p que deseja-se encontrar é dada por*

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

Onde

$$u_1' = \frac{W_1}{W}$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W}$$

e

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x & x\ln x \\ 1 & \ln x + 1 \end{vmatrix} \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & x\ln x \\ \frac{1}{x} & \ln x + 1 \end{vmatrix} \\ &= -\ln x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} \\ &= 1 \end{aligned}$$

sendo $g(x) = \dfrac{1}{x}$ *(função que torna a equação não homogênea). Assim,*

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{-\ln x}{x} && \Rightarrow \quad u_1 = -\frac{\ln^2 x}{2} \\ u_2' &= \frac{1}{x} && \Rightarrow \quad u_2 = \ln x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_p &= -\frac{\ln^2 x}{2}x + \ln x\,(x\ln x) \\ &= \frac{1}{2}x\ln^2 x \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Observe que* $x = 0$ *é um ponto ordinário para a* ***edo***

$$y'' - y' + xy = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned} y'' - y' + xy = 0 \quad &\Rightarrow \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + & \\ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \quad &\Rightarrow \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - & \\ - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\ 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - & \\ -a_1 - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0 \quad &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$[12pt] 2a_2 - a_1 +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + a_{n-1}\right] x^n = 0$$

Portanto,

$$\begin{cases} 2a_2 - a_1 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{a_1}{2} \\ a_{n+2} = \dfrac{(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \end{cases} \Rightarrow$$

Tomando $a_0 = 1$ *e* $a_1 = 0$*, tem-se*

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = 0$$

$$a_3 = -\frac{1}{6}$$

$$a_4 = -\frac{1}{24}$$

$$a_5 = -\frac{1}{120}$$

$$\ldots$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\
&= 1 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 + \cdots
\end{aligned}
$$

Tomando agora, $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, tem-se

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2} \\
a_3 &= \frac{1}{6} \\
a_4 &= -\frac{1}{24} \\
a_5 &= -\frac{1}{30} \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\
&= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots
\end{aligned}
$$

E a solução geral da ***edo*** *é dada por*

$$
y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)
$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Observe que o termo geral desta série é dado por*

$$
a_n = \frac{2^n (x-3)^n}{n+3}
$$

Assim, segue-se que

$$
a_{n+1} = \frac{2^{n+1}(x-3)^{n+1}}{n+4}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{2^{n+1}(x-3)^{n+1}}{n+4} \frac{n+3}{2^n (x-3)^n}\right| \\
&= \left|2(x-3)\frac{n+3}{n+4}\right| \\
&= |2| \left|\frac{n+3}{n+4}\right| |x-3| \\
&= 2\left(\frac{n+3}{n+4}\right)|x-3|
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{n+3}{n+4}\right)|x-3| \\
&= 2\,|x-3| \lim_{n\to+\infty} \frac{n+3}{n+4} \\
&= 2\,|x-3|
\end{aligned}
$$

Usando o ***teste da razão****, a série dada será absolutamente convergente quando*

$$
\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1
$$

Ou seja, quando

$$
\begin{aligned}
2\,|x-3| < 1 \quad &\Rightarrow \\
|x-3| < \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \\
-\frac{1}{2} < x - 3 < \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \\
3 - \frac{1}{2} < x < 3 + \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \\
\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2} \quad &
\end{aligned}
$$

Logo, o intervalo de convergência é

$$
I = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right),
$$

havendo ainda a possibilidade de convergência nos extremos deste intervalo (dispensado de fazer). ■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma M4

Prof°. Edson

1ª Prova **2° Semestre** **2021**

Data: 21 de Junho de 2022 **Duração: 14:00 - 16:00**

Problema 1 *Resolva o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' - y\cos x = xe^{x^2+\operatorname{sen} x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Problema 2 *Resolva a equação*

$$y^2 + 4 - x^2yy' = 0$$

Problema 3 *Resolva a equação*

$$e^{x^3} + \sin y + \left(\frac{x}{3}\cos y\right) y' = 0$$

Problema 4 *Resolva a equação*

$$xy + y^2 + x^2 - x^2y' = 0$$

Problema 5 *Resolva a equação*

$$(x+1)(y' + y^2) = -y$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 1ª Prova **2021**
Data: Segunda-feira, 15 de Agosto **Turma M4**

Exercício 1 *Observe que a equação diferencial*

$$y' - y\cos x = xe^{x^2+\operatorname{sen} x}$$

*é **linear**, sendo*

$$p(x) = -\cos x$$

$$f(x) = xe^{x^2+\operatorname{sen} x}$$

Desta forma, considere

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \int p(x)\\ &= -\int \cos x\, dx\\ &= -\operatorname{sen} x + c_0\end{aligned}$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$. Tomando $c_0 = 0$, segue-se que

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\eta(x)}\\ &= e^{-\operatorname{sen} x}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}q(x) &= \int \mu(x) f(x) dx\\ &= \int e^{-\operatorname{sen} x} x e^{x^2+\operatorname{sen} x} dx\\ &= \int xe^{x^2} dx\\ &= \frac{1}{2}e^{x^2} + c_1\end{aligned}$$

com $c_1 \in \mathbb{R}$. E, finalmente,

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{q(x)}{\mu(x)}\\ &= \frac{\frac{1}{2}e^{x^2} + c_1}{e^{-\operatorname{sen} x}}\\ &= e^{\operatorname{sen} x}\left(\frac{1}{2}e^{x^2} + c_1\right)\end{aligned}$$

Sabendo que $y(0) = 2$, segue-se que

$$c_1 = \frac{3}{2}$$

ea solução do PVIé,portanto,

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{\operatorname{sen} x}\left(e^{x^2} + 3\right)$$

■

Exercício 2 *Observe que a equação diferencial*

$$y^2 + 4 - x^2 yy' = 0$$

usando separação de variáveis, pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}x^2yy' &= y^2 + 4 \quad \Leftrightarrow\\ y\frac{dy}{dx} &= \frac{y^2+4}{x^2} \quad \Leftrightarrow\\ \frac{ydy}{y^2+4} &= \frac{dx}{x^2}\end{aligned}$$

Integrando os dois lados desta equação, obtêm-se

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\ln\left(y^2+4\right) &= -\tfrac{1}{x} + c_0 && \Leftrightarrow\\ \ln\left(y^2+4\right) &= -\tfrac{2}{x} + 2c_0 && \Leftrightarrow\\ y^2 + 4 &= e^{-\frac{2}{x}}e^{2c_0} && \Leftrightarrow\\ y &= \pm\sqrt{c_1 e^{-\frac{2}{x}} - 4}\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Perceba que a equação diferencial*

$$e^{x^3} + \operatorname{sen} y + \left(\frac{x}{3}\cos y\right) y' = 0$$

Pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\left(e^{x^3} + \operatorname{sen} y\right) dx + \left(\frac{x}{3}\cos y\right) dy = 0 \tag{1}$$

Considere

$$M(x,y) = e^{x^3} + \operatorname{sen} y$$

$$N(x,y) = \frac{x}{3}\cos y$$

e observe que

$$M_y = \cos y$$

$$N_x = \frac{1}{3}\cos y$$

e, além disso,

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2}{x}$$

O que significa dizer que a equação dada pode se tornar ***exata*** *e seu* ***fator integrante*** *é dado por*

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\int \frac{2}{x}dx}\\ &= e^{2\ln|x|+c_0}\\ &= e^{\ln|x|^2}e^{c_0}\\ &= e^{c_0}x^2\\ &= c_1x^2\end{aligned}$$

com $c_1 = e^{c_0}$ *e* $c_0 \in \mathbb{R}$. *Escolhendo* $c_1 = 1$ *e multiplicando a equação (1) por* μ, *tem-se*

$$x^2\left(e^{x^3} + \operatorname{sen} y\right)dx + \frac{x^3\cos y}{3}dy = 0$$

que é ***exata****. Para encontrar as soluções desta equação é necessário resolver o seguinte sistema*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x} = x^2\left(e^{x^3} + \operatorname{sen} y\right)\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^3\cos y}{3}\end{cases}$$

Integrando em relação à y a segunda equação do sistema, obtêm-se

$$f(x,y) = \frac{x^3\operatorname{sen} y}{3} + k(x)$$

Donde segue-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2\operatorname{sen} y + k'(x)$$

Comparando este resultado com a primeira equação do sistema, tem-se que

$$k'(x) = x^2e^{x^3} \Leftrightarrow k(x) = \frac{1}{3}e^{x^3} + c_1$$

com $c_1 \in \mathbb{R}$. *Assim,*

$$\begin{aligned}f(x,y) &= \frac{x^3\operatorname{sen} y}{3} + k(x)\\ &= \frac{x^3\operatorname{sen} y + e^{x^3}}{3} + c_1\end{aligned}$$

e a solução da ***edo*** *em questão é dada por*

$$f(x,y) = c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

Ou seja,

$$\frac{x^3\operatorname{sen} y + e^{x^3}}{3} + c_1 = c_2$$

$$x^3\operatorname{sen} y + e^{x^3} = c$$

Com $c \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 4 *Observe que a equação*

$$xy + y^2 + x^2 - x^2y' = 0$$

Pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\left(xy + y^2 + x^2\right)dx - x^2dy = 0 \quad &\Leftrightarrow\\ x^2\left\{\left[\tfrac{y}{x} + \left(\tfrac{y}{x}\right)^2 + 1\right]dx - dy\right\} = 0 \quad &\Leftrightarrow\\ \left[\tfrac{y}{x} + \left(\tfrac{y}{x}\right)^2 + 1\right]dx - dy = 0 \quad &\end{aligned}$$

Considere

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow \begin{cases} y = ux\\ dy = x\,du + u\,dx\end{cases}$$

Assim, a equação pode ser rescrita como

$$\begin{aligned}\left(u + u^2 + 1\right)dx - \left(x\,du + u\,dx\right) &= 0 &\Leftrightarrow\\ \left(u^2 + 1\right)dx - x\,du &= 0 &\Leftrightarrow\\ \tfrac{dx}{x} &= \frac{du}{u^2+1} &\Leftrightarrow\\ \ln|x| &= \operatorname{arctg} u + c_0 &\end{aligned}$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$. *Trazendo de volta a variável y, tem-se*

$$\ln|x| = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + c_0 \quad \Leftrightarrow$$

$$y = x\operatorname{tg}\left(\ln|x| - c_0\right)$$

■

Exercício 5 *Reescrevendo a equação diferencial*

$$(x+1)\left(y' + y^2\right) = -y,$$

tem-se

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x+1}y = -y^2$$

*que é uma **equação de Bernoulli** e pode ainda ser vista como*

$$-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x+1}\frac{1}{y} = 1$$

Considere

$$u = y^{-1}$$

e observe que

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= -y^{-2}\frac{dy}{dx}\\ &= -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}\end{aligned}$$

*e, substituindo na **edo** dada, tem-se*

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x+1}u = 1$$

*Ou seja, a **edo** resultante é **linear**, com*

$$\begin{aligned}P(x) &= -\frac{1}{x+1}\\ f(x) &= 1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int P(x)dx &= \int -\frac{dx}{x+1}\\ &= -\ln|x+1| + c_0\end{aligned}$$

*com $c_0 \in \mathbb{R}$. O **fator integrante** desta equação será então*

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\int P(x)dx}\\ &= e^{-\ln|x+1|+c_0}\\ &= \pm e^{c_0}(x+1)^{-1}\\ &= \frac{c_1}{x+1}\end{aligned}$$

onde $c_1 = \pm e^{c_0}$. Tomando $c_1 = 1$, tem-se

$$\begin{aligned}u(x) &= \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)f(x)dx\\ &= (x+1)\int\frac{dx}{x+1}\\ &= (x+1)(\ln|x+1| + c)\end{aligned}$$

com $c \in \mathbb{R}$. Trazendo a variável y de volta, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{y} &= u \qquad \Leftrightarrow\\ \frac{1}{y} &= (x+1)(\ln|x+1| + c)\end{aligned}$$

Ou seja,

$$y(x) = \frac{1}{(x+1)(\ln|x+1| + c)}$$

$\blacksquare$

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma M4

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2ª Prova **2º Semestre** **2021**

Data: 02 de Agosto de 2022 **Duração: 14:00 - 16:00**

Problema 1 *Sabendo que a função $y_1 = x^2 + 1$ é uma solução da equação*

$$(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

Encontre outra solução desta ***edo****, que seja linearmente independente de y_1.*

Problema 2 *Resolva a equação*

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

Problema 3 *Encontre uma* ***solução particular*** *para a equação*

$$y'' + 4y' = x^2 - 3$$

Problema 4 *Encontre uma* ***solução particular*** *para a equação*

$$y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$$

Problema 5 *Resolva a equação*

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = e^x$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito 2ª Prova **2021**
Data: Quinta-feira, 18 de Agosto **Turma M4**

Exercício 1 *Observe que a equação*

$$(x^2-1)y''-2xy'+2y=0$$

pode ser reescrita em sua ***forma padrão*** *da seguinte forma,*

$$y''-\frac{2x}{x^2-1}y'+\frac{2}{x^2-1}y=0$$

onde

$$P(x)=-\frac{2x}{x^2-1}$$

Deseja-se encontrar uma outra solução desta equação sabendo que

$$y_1=x^2+1$$

é uma solução. Usando o método da ***redução de ordem****, considere*

$$\begin{aligned}\eta(x)&=\int -P(x)dx\\&=\int\frac{2x}{x^2-1}dx\\&=\ln\left|x^2-1\right|+c_0\end{aligned}$$

com $c_0\in\mathbb{R}$. *Disto segue-se que*

$$\begin{aligned}\mu(x)&=e^{\mu(x)}\\&=e^{\ln\left|x^2-1\right|+c_0}\\&=\pm e^{c_0}\left(x^2-1\right)\\&=c_1\left(x^2-1\right)\end{aligned}$$

onde $c_1=\pm e^{c_0}$. *Tomando* $c_1=1$, *tem-se,*

$$\begin{aligned}u(x)&=\int\frac{\mu(x)}{y_1^2}dx\\&=\int\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}dx\\&=-\frac{x}{x^2+1}+c_2,\ c_2\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Tomando $c_2=0$, *segue-se que,*

$$\begin{aligned}y_2(x)&=y_1(x)u(x)\\&=\left(x^2+1\right)\left(-\frac{x}{x^2+1}\right)\\&=-x\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *A* ***equação auxiliar*** *da* ***edo*** *em questão é dada por*

$$m^3-3m^2+3m-1=0,$$

Observe que

$$m_1=1$$

é uma solução desta equação e

$$m^3-3m^2+3m-1=(m-1)\left(m^2-2m+1\right)$$

Ou seja, as outras solução desta equação são a raízes da equação

$$m^2-2m+1=0$$

que são

$$m_2=1$$

$$m_3=1$$

Assim, o ***conjunto fundamental de soluções*** *da equação diferencial em questão é*

$$\begin{aligned}y_1&=e^{m_1x}\\&=e^x\\y_2&=xy_1\\&=xe^x\\y_3&=xy_2\\&=x^2e^x\end{aligned}$$

*Logo, a **solução geral** da equação é*

$$\begin{aligned} y &= c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 \\ &= c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x \\ &= e^x\left(c_1 + c_2x + c_3x^2\right) \end{aligned}$$

com c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Deseja-se encontrar uma **solução particular** y_p da equação diferencial*

$$y'' + 4y' = x^2 - 3$$

Considere

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

e observe que

$$\begin{aligned} y' &= 3Ax^2 + 2Bx + C \\ y'' &= 6Ax + 2B \end{aligned}$$

Substituindo na equação dada, tem-se

$$\begin{aligned} y'' + 4y' &= x^2 - 3 \Leftrightarrow \\ 6Ax + 2B + 4\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) &= x^2 - 3 \Leftrightarrow \\ 12Ax^2 + (6A + 8B)\,x + 2B + 4C &= x^2 - 3 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{12} \\ B = -\dfrac{1}{16} \\ C = \dfrac{-23}{32} \\ D \in \mathbb{R} \end{cases}$$

*e, portanto a **solução particular** é*

$$y_p = \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{16} - \frac{23}{32}x$$

tomando $D = 0$. ■

Exercício 4 *A **equação auxiliar** da equação difierencial **homogênea associada** é dada por*

$$m^2 + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 = 0$$

ou seja

$$m_1 = m_2 = -1$$

e, o conjunto fundamental de soluções é

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{m_1x} \\ &= e^{-x} \\ y_2 &= xy_1 \\ &= xe^{-x} \end{aligned}$$

*Usando o **método da variação de parâmetros**, tem-se que*

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)\,e^{-x} \end{vmatrix} \\ &= e^{-2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, \; f = e^{-x}\ln x \\ &= \begin{vmatrix} 0 & xe^{-x} \\ e^{-x}\ln x & (1-x)\,e^{-x} \end{vmatrix} \\ &= -xe^{-2x}\ln x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & e^{-x}\ln x \end{vmatrix} \\ &= e^{-2x}\ln x \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} \\ &= \frac{-xe^{-2x}\ln x}{e^{-2x}} \\ &= -x\ln x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{W_2}{W} \\ &= \frac{e^{-2x}\ln x}{e^{-2x}} \\ &= \ln x \end{aligned}$$

Ou seja

$$u_1 = \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{2} - \ln x\right) + c_0$$

$$u_2 = x\left(\ln x - 1\right) + c_1$$

*com $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. Considerando $c_0 = c_1 = 0$ e $x > 0$, segue-se que, uma **solução particular** da equação é*

$$\begin{aligned} y_p &= y_1u_1 + y_2u_2 \\ &= \frac{1}{2}e^{-x}x^2\left(-\frac{3}{2} + \ln x\right) \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *A **equação auxiliar** da **edo homogênia associada** é dada por*

$$m^2 + 3m + 2 = 0$$

cujas raízes são,

$$m_1 = -1$$

$$m_2 = -2$$

Ou seja

$$y_1 = x^{-1}$$

$$y_2 = x^{-2}$$

*e a **solução complementar** da **edo** é*

$$\begin{aligned} y_c &= c_1y_1 + c_2y_2 \\ &= c_1x^{-1} + c_2x^{-2} \end{aligned}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

*Usando o **método da variação de parâmetros** para encontrar uma **solução particular**, tem-se que a equação dada em sua forma padrão torna-se*

$$y'' + \frac{4}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = \frac{e^x}{x^2}$$

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x^{-1} & x^{-2} \\ -x^{-2} & -2x^{-3} \end{vmatrix} \\ &= -x^{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, \, f = \frac{e^x}{x^2} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & x^{-2} \\ \frac{e^x}{x^2} & -2x^{-3} \end{vmatrix} \\ &= -e^x x^{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x^{-1} & 0 \\ -x^{-2} & \frac{e^x}{x^2} \end{vmatrix} \\ &= e^x x^{-3} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} \\ &= \frac{-e^x x^{-4}}{-x^{-4}} \\ &= e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{W_2}{W} \\ &= \frac{e^x x^{-3}}{-x^{-4}} \\ &= -e^x x \end{aligned}$$

Ou seja

$$u_1 = e^x + c_3$$

$$u_2 = e^x\left(1 - x\right) + c_4$$

*com $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. Considerando $c_3 = c_4 = 0$, segue-se que, uma **solução particular** da equação é*

$$\begin{aligned} y_p &= y_1u_1 + y_2u_2 \\ &= e^x x^{-2} \end{aligned}$$

e a solução geral da edo é então

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1x^{-1} + c_2x^{-2} + e^x x^{-2} \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma M4

Prof^{o}. Edson

3ª Prova | **2º Semestre** | **2021**

Data: 06 de Setembro de 2022 | **Duração: 14:00 - 17:00**

Problema 1 *Determine o* ***intervalo de convergência*** *da série de potências dada por*

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} (x+2)^{3n}$$

Problema 2 *Encontre a* ***solução geral*** *da* ***edo***

$$\left(1 - x^2\right) y'' + xy' - y = 0$$

Problema 3 *Encontre* ***uma solução*** *da equação*

$$2x^2y'' + xy' - (2x+1)y = 0$$

Problema 4 *Calcule*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s^2+s+1}{(s^2+4)(s^2-9)} \right\}$$

Problema 5 *Resolva o* ***problema de valor inicial***

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = -2x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -5 \end{cases}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito 3ª Prova **2021**
Data: Quinta-feira, 8 de Setembro **Turma M4**

Exercício 1 *Observe que o termo geral desta série é dado por*

$$a_n = \frac{(-1)^n}{4^n}(x+2)^{3n}$$

Disto segue-se que

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}}(x+2)^{3(n+1)}$$

e

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}}(x+2)^{3(n+1)}\frac{4^n}{(-1)^n(x+2)^{3n}}\right|$$

$$= \left|\frac{-1}{4}(x+2)^3\right|$$

$$= \frac{1}{4}|x+2|^3$$

Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}|x+2|^3$$

$$= \frac{1}{4}|x+2|^3$$

Logo, pelo ***teste da razão****, a série dada será absolutamente convergente quando*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{4}|x+2|^3 < 1$$

Ou seja,

$$-\sqrt[3]{4}-2 < x < \sqrt[3]{4}-2$$

$\blacksquare$

Exercício 2 *Observe que $x=0$ é um ponto ordinário para a* ***edo***

$$(1-x^2)y''+xy'-y=0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned}
(1-x^2)y''+xy'-y=0 \quad &\Rightarrow\\
(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2} + &\\
+x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = 0 \quad &\Rightarrow\\
\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n + &\\
+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n - \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = 0 \quad &\Rightarrow\\
\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - &\\
-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n + \sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n - \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = 0 \quad &\Rightarrow\\
2a_2+6a_3x+\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - &\\
-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n + a_1x + \sum_{n=2}^{\infty}na_nx^n &\\
-a_0-a_1x-\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n = 0 \quad &\Rightarrow\\
2a_2-a_0+6a_3x+ &
\end{aligned}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n-1)^2a_n\right]x^n = 0$$

Portanto,

$$\begin{cases} 2a_2-a_0=0 \\ 6a_3=0 \quad \Rightarrow \\ (n+2)(n+1)a_{n+2}-(n-1)^2a_n=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{a_0}{2} \\ a_3 = 0 \\ a_{n+2} = \dfrac{(n-1)^2 a_n}{(n+2)(n+1)} \end{cases}$$

Tomando $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, tem-se

$$a_2 = \frac{1}{2}$$
$$a_3 = 0$$
$$a_4 = \frac{1}{24}$$
$$a_5 = 0$$
$$a_6 = \frac{1}{80}$$

Ou seja,

$$y_1(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{80}x^6 + \cdots$$

Tomando agora, $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, tem-se

$$a_2 = 0$$
$$a_3 = 0$$
$$a_4 = 0$$
$$a_5 = 0$$
$$a_6 = 0$$
$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_2(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots$$
$$= x$$

*E a solução geral da **edo** é dada por*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Observe que $x = 0$ é um ponto singular regular da equação*

$$2x^2y'' + xy' - (2x+1)\,y = 0$$

*Deste modo, considere a seguinte proposta de solução segundo o **método de Frobenius***

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

e, substituindo na equação, tem-se

$$2x^2y'' + xy' - (2x+1)\,y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + $$
$$+x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} - (2x+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} +$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^r \left[\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)a_n x^n + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)a_n x^n +$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2r(r-1)a_0 + ra_0 - a_0 +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r)a_n x^n +$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$[2r(r-1) + r - 1]\,a_0 +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{[(n+r)(2n+2r-1) - 1]\,a_n - 2a_{n-1}\right\} x^n = 0$$

Logo,

$$\begin{cases} (2r+1)\,(r-1)a_0 = 0 \\ [(n+r)(2n+2r-1) - 1]\,a_n - 2a_{n-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r = 1 \text{ ou } r = -\frac{1}{2} \\ a_n = \dfrac{2a_{n-1}}{(n+r)(2n+2r-1) - 1} \end{cases}$$

Supondo $a_0 = 1$ e $r = 1$, tem-se

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2a_{n-1}}{(n+1)(2n+1)-1} \\
&= \frac{2a_{n-1}}{n\,(2n+3)}
\end{aligned}
$$

e,

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_1 &= \frac{2}{5} \\
a_2 &= \frac{2}{35} \\
a_3 &= \frac{4}{945} \\
a_4 &= \frac{2}{10395} \\
a_5 &= \frac{4}{675.675} \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

Ou seja

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x^r\left(a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + \cdots\right) \\
&= x\left(1 + \frac{2x}{5} + \frac{2x^2}{35} + \frac{4x^3}{945} + \frac{2x^4}{10395} + \cdots\right) \\
&= x + \frac{2x^2}{5} + \frac{2x^3}{35} + \frac{4x^4}{945} + \frac{2x^5}{10395} + \cdots
\end{aligned}
$$

*é **uma solução** da equação dada.* ■

Exercício 4 *Usando **frações parciais**, observe inicialmente que*

$$
\frac{s^2+s+1}{(s^2+4)(s^2-9)} = \frac{3}{13}\frac{1}{s^2+4} - \frac{1}{13}\frac{s}{s^2+4} - \\
- \frac{7}{78}\frac{1}{s+3} + \frac{1}{6}\frac{1}{s-3}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+s+1}{(s^2+4)(s^2-9)}\right\} &= \frac{3}{13}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} - \\
&- \frac{1}{13}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \\
&- \frac{7}{78}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + \\
&+ \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} \\
&= \frac{3}{26}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{13}\cos 2t \\
&- \frac{7}{78}e^{-3t} + \frac{1}{6}e^{3t}
\end{aligned}
$$

■

Exercício 5 *Utilizando a **Transformada de Laplace** para a resolução desta equação, observe que*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{y'' - 2y' + 2y\right\} &= \mathcal{L}\left\{-2x\right\} \quad \Leftrightarrow \\
\mathcal{L}\left\{y''\right\} - 2\mathcal{L}\left\{y'\right\} + 2\mathcal{L}\left\{y\right\} &= -2\mathcal{L}\left\{x\right\}
\end{aligned}
$$

Considerando

$$Y = \mathcal{L}\left\{y\right\},$$

a equação anterior pode ser reescrita como

$$
\begin{aligned}
s^2Y - sy(0) - y'(0) - 2\left[sY - y(0)\right] + 2Y &= -\frac{2}{s^2} \quad \Rightarrow \\
\left(s^2 - 2s + 2\right)Y + 5 &= -\frac{2}{s^2} \quad \Rightarrow \\
Y &= \frac{-2-5s^2}{(s^2-2s+2)\,s^2}
\end{aligned}
$$

(***Obs.:*** *Quem chegou até aqui obteve 100% da questão.)*

Logo,

$$
\begin{aligned}
y &= \mathcal{L}^{-1}\left\{Y\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2-5s^2}{(s^2-2s+2)\,s^2}\right\} \\
&= e^x\left(\cos x - 5\sin x\right) - x - 1
\end{aligned}
$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma M4 e TX

Prof$^{\text{o}}$. Edson

Prova Final | **2$^{\text{o}}$ Semestre** | **2021**

Data: 12 de Setembro de 2022 | **Duração: 14:00 - 17:00**

Problema 1 *Encontre a* ***solução geral*** *da equação*

$$\left(ye^{-x}+1\right)dx + xe^{-x}dy = 0$$

Problema 2 *Sabendo que a função* $y_1 = x^2 - 1$ *é uma solução da equação*

$$(x^2-1)y'' - 2y = 0$$

Encontre outra solução desta ***edo****, que seja linearmente independente de* y_1.

Problema 3 *Encontre uma* ***solução particular*** *da equação*

$$y'' + 5y' + 6y = x^2e^{-x}$$

Problema 4 *Encontre a* ***solução geral*** *da equação*

$$y'' + x^2y' + 2xy = 0$$

Problema 5 *Resolva o* ***problema de valor inicial***

$$\begin{cases} y'' - y' - 12y = x \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito Prova Final **2021**
Data: Segunda-feira, 12 de Setembro **Turmas M4 e TX**

Exercício 1 *Considere a diferencial*

$$\left(ye^{-x}+1\right)dx + xe^{-x}dy = 0$$

Tem-se que

$$M(x,y) = ye^{-x}+1$$

$$N(x,y) = xe^{-x}$$

e observe que

$$M_y = e^{-x}$$

$$N_x = (1-x)\,e^{-x}$$

e, além disso,

$$\frac{M_y - N_x}{N} = 1$$

O que significa dizer que a equação dada pode se tornar ***exata*** *e seu* ***fator integrante*** *é dado por*

$$\mu(x) = e^{\int\left(\frac{M_y-N_x}{N}\right)dx}$$

$$= e^{\int dx}$$

$$= e^{x+c_0}$$

$$= c_1e^{x}$$

*com $c_1 = e^{c_0}$ e $c_0 \in \mathbb{R}$. Escolhendo $c_1 = 1$ e multiplicando a equação (**??**) por μ, tem-se*

$$\left(y+e^{x}\right)dx + xdy = 0$$

que é ***exata****. Para encontrar as soluções desta equação é necessário resolver o seguinte sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y + e^{x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x \end{cases}$$

Integrando em relação à y a segunda equação do sistema, obtêm-se

$$f(x,y) = xy + k(x)$$

Donde segue-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + k'(x)$$

Comparando este resultado com a primeira equação do sistema, tem-se que

$$k'(x) = e^{x} \Leftrightarrow k(x) = e^{x} + c_1$$

com $c_1 \in \mathbb{R}$. Assim,

$$f(x,y) = xy + k(x)$$

$$= xy + e^{x} + c_1$$

e a solução da ***edo*** *em questão é dada por*

$$f(x,y) = c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

Ou seja,

$$xy + e^{x} + c_1 = c_2$$

$$xy + e^{x} = c$$

$$y = \frac{c - e^{x}}{x}$$

Com $c \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 2 *Observe que a equação*

$$(x^2-1)y'' - 2y = 0$$

pode ser reescrita em sua ***forma padrão*** *da seguinte forma,*

$$y'' + 0\,y' - \frac{2}{x^2-1}y = 0$$

onde

$$P(x) = 0$$

Deseja-se encontrar uma outra solução desta equação sabendo que

$$y_1 = x^2 - 1$$

é uma solução. Usando o método da ***redução de ordem****, considere*

$$\eta(x) = \int -P(x)dx$$

$$= \int 0dx$$

$$= c_0$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$. Disto segue-se que

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\mu(x)} \\ &= e^{c_0} \\ &= c_1\end{aligned}$$

onde $c_1 = e^{c_0}$. Tomando $c_1 = 1$, tem-se,

$$\begin{aligned}u(x) &= \int \frac{\mu(x)}{y_1^2} dx \\ &= \int \frac{dx}{(x^2-1)^2} \\ &= \int \left(\frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x+1)^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln|x-1| - \\ &\quad - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} + c_2 \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{x}{x^2-1} + c_2\end{aligned}$$

Tomando $c_2 = 0$, segue-se que,

$$\begin{aligned}y_2(x) &= y_1(x) u(x) \\ &= \frac{1}{4}\left(x^2-1\right) \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - x\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Deseja-se encontrar uma* ***solução particular*** *y_p da equação diferencial*

$$y'' + 5y' + 6y = x^2 e^{-x}$$

Considere

$$y_p = \left(Ax^2 + Bx + C\right) e^{-x}$$

e observe que

$$\begin{aligned}y' &= \left[-Ax^2 + (2A - B)x + B - C\right] e^{-x} \\ y'' &= \left[Ax^2 - (4A - B)x + 2A - 2B + C\right] e^{-x}\end{aligned}$$

Substituindo na equação dada, tem-se

$$\begin{aligned}y'' + 5y' + 6y = x^2 e^{-x} &\Leftrightarrow \\ \left\{2Ax^2 + (6A + 2B)x + 2A + 3B + 2C\right\} e^{-x} = x^2 e^{-x} &\Leftrightarrow\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = -\dfrac{3}{2} \\ C = \dfrac{7}{4} \end{cases}$$

e, portanto a ***solução particular*** *é*

$$y_p = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right) e^{-x}$$

□

(Outro Modo:)

A ***equação auxiliar*** *da equação diferencial* ***homogênea associada*** *é dada por*

$$m^2 + 5m + 6 = 0$$

ou seja

$$\begin{aligned}m_1 &= -2 \\ m_2 &= -3\end{aligned}$$

e, o conjunto fundamental de soluções é

$$\begin{aligned}y_1 &= e^{m_1 x} \\ &= e^{-2x} \\ y_2 &= e^{m_2 x} \\ &= e^{-3x}\end{aligned}$$

Usando o ***método da variação de parâmetros****, tem-se que*

$$\begin{aligned}W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-3x} \\ -2e^{-2x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} \\ &= -e^{-5x}\end{aligned}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, \; f = x^2 e^{-x}$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & e^{-3x} \\ x^2 e^{-x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix}$$
$$= -x^2 e^{-4x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & x^2 e^{-x} \end{vmatrix}$$
$$= x^2 e^{-3x}$$

e,

$$u_1' = \frac{W_1}{W}$$
$$= \frac{-x^2 e^{-4x}}{-e^{-5x}}$$
$$= x^2 e^x$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W}$$
$$= \frac{x^2 e^{-3x}}{-e^{-5x}}$$
$$= -x^2 e^{2x}$$

Ou seja

$$u_1 = e^x \left(x^2 - 2x + 2 \right) + c_0$$
$$u_2 = -\frac{1}{4} e^{2x} \left(2x^2 - 2x + 1 \right) + c_1$$

com $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$*. Considerando* $c_0 = c_1 = 0$*, segue-se que, uma* ***solução particular*** *da equação é*

$$y_p = y_1 u_1 + y_2 u_2$$
$$= \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{7}{4} \right) e^{-x}$$

■

Exercício 4 *Observe que* $x = 0$ *é um ponto ordinário para a* ***edo***

$$y'' + x^2 y' + 2xy = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$
$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned}
y'' + x^2 y' + 2xy = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + & \\
+ x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=-1}^{\infty} (n+3)(n+2) a_{n+3} x^{n+1} + & \\
\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^{n+1} = 0 \quad &\Rightarrow \\
2a_2 + 6a_3 x + 2a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} (n+3)(n+2) a_{n+3} x^{n+1} + & \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 a_n x^{n+1} = 0 \quad &\Rightarrow \\
2a_2 + (6a_3 + 2a_0)\, x + & \\
\sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+3)(n+2) a_{n+3} \right. & \\
\left. + n a_n + 2a_n \right] x^{n+1} = 0 &
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} 2a_2 = 0 \\ 6a_3 + 2a_0 = 0 \\ (n+3)(n+2) a_{n+3} + (n+2)\, a_n = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ a_3 = -\dfrac{a_0}{3} \\ a_{n+3} = \dfrac{-a_n}{n+3} \end{cases}$$

Tomando $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} a_2 &= 0 \\ a_3 &= -\frac{1}{3} \\ a_4 &= 0 \\ a_5 &= 0 \\ a_6 &= \frac{1}{18} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_5x^5 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^6 + \cdots \end{aligned}$$

Tomando agora, $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} a_2 &= 0 \\ a_3 &= 0 \\ a_4 &= -\frac{1}{4} \\ a_5 &= 0 \\ a_6 &= 0 \\ a_7 &= \frac{1}{28} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_5x^5 + \cdots \\ &= x - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{28}x^7 - \cdots \end{aligned}$$

*E a solução geral da **edo** é dada por*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Utilizando a **Transformada de Laplace** para a resolução desta equação, observe que*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{y'' - y' - 12y\right\} &= \mathcal{L}\left\{x\right\} \quad \Leftrightarrow \\ \mathcal{L}\left\{y''\right\} - \mathcal{L}\left\{y'\right\} - 12\mathcal{L}\left\{y\right\} &= \mathcal{L}\left\{x\right\} \end{aligned}$$

Considerando

$$Y = \mathcal{L}\left\{y\right\},$$

a equação anterior pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} s^2Y - sy(0) - y'(0) - [sY - y(0)] - 12Y &= \frac{1}{s^2} \Rightarrow \\ \left(s^2 - s - 12\right)Y + s - 1 &= \frac{1}{s^2} \Rightarrow \\ Y &= \frac{-s^3 + s^2 + 1}{s^2\left(s^2 - s - 12\right)} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}^{-1}\left\{Y\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-s^3 + s^2 + 1}{s^2\left(s^2 - s - 12\right)}\right\} \end{aligned}$$

*Usando **frações parciais**, tem-se que*

$$\begin{aligned} \frac{-s^3 + s^2 + 1}{s^2\left(s^2 - s - 12\right)} = \frac{1}{144s} - \frac{47}{112\left(s - 4\right)} - \\ - \frac{37}{63\left(s + 3\right)} - \frac{1}{12s^2} \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{144}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{47}{112}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - 4}\right\} - \\ &- \frac{37}{63}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 3}\right\} - \frac{1}{12}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \\ &= \frac{1}{144} - \frac{47}{112}e^{4x} - \frac{37}{63}e^{-3x} - \frac{1}{12}x \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma M4

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{a}}$ Prova **2$^{\text{o}}$ Semestre** **2021**

Data: 05 de Julho de 2022 **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Resolva o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y = \ln y' \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

Problema 2 *Resolva a equação*

$$(x-5)\,(xy' + 3y) = 2$$

Problema 3 *Resolva a equação*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - e^y}{x\,(e^y - x)}$$

Problema 4 *Resolva a equação*

$$2xydx + \left(y^2 - x^2\right)dy = 0$$

Problema 5 *Resolva a equação*

$$\sqrt{y}(3y' + y) = x$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito 1ª Prova **2021**
Data: Terça-feira, 16 de Agosto de 2022 **Turma TX**

Exercício 1 *Observe que a equação diferencial*

$$y = \ln y'$$

pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} e^y &= y' \quad \Leftrightarrow \\ \frac{dy}{dx} &= e^y \quad \Leftrightarrow \\ \frac{dy}{e^y} &= dx \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{e^y} &= \int dx && \Leftrightarrow \\ -\frac{1}{e^y} &= x + c_0 && \Leftrightarrow \\ \frac{-1}{x+c_0} &= e^y && \Leftrightarrow \\ y &= \ln\left(\frac{1}{-x-c_0}\right) && \Leftrightarrow \\ y &= -\ln(c_1 - x) \end{aligned}$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$ e $c_1 = -c_0$.
Sabendo que $y(0) = 5$, segue-se que $c_1 = e^{-5}$ e

$$y = -\ln\left(e^{-5} - x\right)$$

■

Exercício 2 *Observe que a equação diferencial*

$$(x-5)\left(xy' + 3y\right) = 2$$

pode ser reescrita como

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x(x-5)}$$

*que é uma equação **linear** com*

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{3}{x} \\ f(x) &= \frac{2}{x(x-5)} \end{aligned}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int P(x)dx \\ &= \int \frac{3}{x}dx \\ &= 3\ln|x| + c_0 \end{aligned}$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$. E,

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{3\ln|x|+c_0} \\ &= \pm e^{c_0}x^3 \\ &= c_1x^3 \end{aligned}$$

onde $c_1 = \pm e^{c_0}$. Tomando $c_1 = 1$, tem-se,

$$\begin{aligned} q(x) &= \int \mu(x)f(x)dx \\ &= \int \frac{2x^2}{x-5}dx \\ &= 10x + x^2 + 50\ln|x-5| + c_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{q(x)}{\mu(x)} \\ &= \frac{10x + x^2 + 50\ln|x-5| + c_2}{x^3} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Perceba que a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - e^y}{x\left(e^y - x\right)}$$

Pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\left(e^y - 2xy\right)dx + x\left(e^y - x\right)dy = 0$$

Considere

$$\begin{aligned} M(x,y) &= e^y - 2xy \\ N(x,y) &= x\left(e^y - x\right) \end{aligned}$$

e observe que

$$M_y = e^y - 2x$$
$$N_x = e^y - 2x$$

O que significa dizer que a equação dada é ***exata*** *Para encontrar as soluções desta equação é necessário resolver o seguinte sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^y - 2xy \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x\left(e^y - x\right) \end{cases}$$

Integrando em relação à x a primeira equação do sistema, obtêm-se

$$f(x,y) = xe^y - \frac{x^2 y}{2} + k(y)$$

Donde segue-se que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y - \frac{x^2}{2} + k'(y)$$

Comparando este resultado com a segunda equação do sistema, tem-se que

$$k'(y) = -\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow k(y) = -\frac{x^2 y}{2} + c_1$$

com $c_1 \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xe^y - \frac{x^2 y}{2} + k(y) \\ &= xe^y - x^2 y + c_1 \end{aligned}$$

e a solução da ***edo*** *em questão é dada por*

$$f(x,y) = c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

Ou seja,

$$xe^y - x^2 y = c$$

Com $c \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 4 *Observe que a equação*

$$2xydx + \left(y^2 - x^2\right) dy = 0$$

Pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} x^2 \left\{ 2\frac{y}{x}dx + \left[\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1\right] dy \right\} = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ 2\frac{y}{x}dx + \left[\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1\right] dy = 0 & \end{aligned}$$

Considere

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow \begin{cases} y = ux \\ dy = x\,du + u\,dx \end{cases}$$

Assim, a equação pode novamente ser rescrita como

$$\begin{aligned} 2udx + \left(u^2 - 1\right)\left(x\,du + u\,dx\right) &= 0 && \Leftrightarrow \\ \left(u + u^3\right) dx + x\left(u^2 - 1\right)\, du &= 0 && \Leftrightarrow \\ \left(u + u^3\right) dx &= -x\left(u^2 - 1\right)\, du && \Leftrightarrow \\ \frac{dx}{x} &= -\frac{\left(u^2 - 1\right)\, du}{u + u^3} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x} &= -\int \frac{\left(u^2 - 1\right)\, du}{u + u^3} \quad \Leftrightarrow \\ \ln|x| &= -\ln\left(\tfrac{u^2+1}{u}\right) + c_0 \end{aligned}$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$. Trazendo de volta a variável y, tem-se

$$\begin{aligned} \ln x = \ln\left(\tfrac{u^2+1}{u}\right) + c_0 \quad &\Leftrightarrow \\ \ln x = -\ln\left(\tfrac{x^2+y^2}{xy}\right) + c_0 \quad &\Leftrightarrow \\ \ln\left(\tfrac{x^2+y^2}{y}\right) = c_0 \quad &\Leftrightarrow \\ \tfrac{x^2+y^2}{y} = e^{c_0} \quad &\Leftrightarrow \\ \tfrac{x^2}{y} + y = c_1 & \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Reescrevendo a equação diferencial*

$$\sqrt{y}\left(3y' + y\right) = x,$$

tem-se

$$y' + \frac{1}{3}y = \frac{x}{3}y^{-\frac{1}{2}},$$

que é uma ***equação de Bernoulli*** *e pode ainda ser vista como*

$$y^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}} = \frac{x}{3}$$

Considere

$$u = y^{\frac{3}{2}}$$

e observe que

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}$$

e, substituindo na ***edo*** *dada, tem-se*

$$\frac{2}{3}\frac{du}{dx} + \frac{1}{3}u = \frac{x}{3} \Leftrightarrow \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}u = \frac{x}{2}$$

*Ou seja, a **edo** resultante é **linear**, com*

$$P(x) = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{x}{2}$$

e

$$\int P(x)dx = \int \frac{dx}{2}$$

$$= \frac{x}{2} + c_0$$

*com $c_0 \in \mathbb{R}$. O **fator integrante** desta equação será então*

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

$$= e^{\frac{x}{2}+c_0}$$

Tomando $c_0 = 0$, tem-se

$$u(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x) f(x) dx$$

$$= \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}} \int \frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} dx$$

$$= x - 2 + \frac{c}{e^{\frac{x}{2}}}$$

com $c \in \mathbb{R}$. Trazendo a variável y de volta, tem-se

$$y^{\frac{3}{2}} = u \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{\left(x - 2 + ce^{-\frac{x}{2}}\right)^2}$$

$\blacksquare$

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma TX

Profº. Edson

2ª Prova **2º Semestre** **2021**

Data: 02 de Agosto de 2022 **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Sabendo que a função $y_1 = x + 1$ é uma solução da equação*

$$(x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' + 3y = 0$$

Encontre outra solução desta ***edo****, que seja linearmente independente de y_1.*

Problema 2 *Resolva a equação*

$$y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$$

Problema 3 *Encontre uma* ***solução particular*** *para a equação*

$$y'' + 2y' - 24y = -(x+2)e^{4x}$$

Problema 4 *Encontre uma* ***solução particular*** *para a equação*

$$y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^x)$$

Problema 5 *Resolva a equação*

$$x^2 y'' + 3xy' + y = \ln x$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito 2ª Prova **2021**
Data: Quinta-feira, 18 de Agosto **Turma TX**

Exercício 1 *Observe que a equação*

$$(x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' + 3y = 0$$

pode ser reescrita em sua ***forma padrão*** *da seguinte forma,*

$$y'' - \frac{3}{x+1}y' + \frac{3}{(x+1)^2}y = 0$$

onde

$$P(x) = -\frac{3}{x+1}$$

Deseja-se encontrar uma outra solução desta equação sabendo que

$$y_1 = x+1$$

é uma solução. Usando o método da ***redução de ordem****, considere*

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \int -P(x)dx \\ &= \int \frac{3}{x+1}dx \\ &= 3\ln|x+1| + c_0\end{aligned}$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$. Disto segue-se que

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\mu(x)} \\ &= e^{3\ln|x+1|+c_0} \\ &= \pm e^{c_0}(x+1)^3 \\ &= c_1(x+1)^3\end{aligned}$$

onde $c_1 = \pm e^{c_0}$. Tomando $c_1 = 1$, tem-se,

$$\begin{aligned}u(x) &= \int \frac{\mu(x)}{y_1^2}dx \\ &= \int \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2}dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Tomando $c_2 = 0$, segue-se que,

$$\begin{aligned}y_2(x) &= y_1(x)u(x) \\ &= (x+1)\left(\frac{x^2}{2} + x\right) \\ &= \frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{2} + x\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *A* ***equação auxiliar*** *da* ***edo*** *em questão é dada por*

$$m^3 + 3m^2 - 4m - 12 = 0,$$

Observe que

$$m_1 = 2$$

é uma solução desta equação e

$$m^3 + 3m^2 - 4m - 12 = (m-2)\left(m^2 + 5m + 6\right)$$

Ou seja, as outras solução desta equação são a raízes da equação

$$m^2 + 5m + 6 = 0$$

que são

$$\begin{aligned}m_2 &= -2 \\ m_3 &= -3\end{aligned}$$

Assim, o ***conjunto fundamental de soluções*** *da equação diferencial em questão é*

$$\begin{aligned}y_1 &= e^{m_1 x} \\ &= e^{2x} \\ y_2 &= e^{m_2 x} \\ &= e^{-2x} \\ y_3 &= e^{m_3 x} \\ &= e^{-3x}\end{aligned}$$

Logo, a ***solução geral*** *da equação é*

$$\begin{aligned} y &= c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 \\ &= c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + c_3e^{-3x} \end{aligned}$$

com c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Deseja-se encontrar uma* ***solução particular*** y_p *da equação diferencial*

$$y'' + 2y' - 24y = -(x+2)\,e^{4x}$$

Considere

$$y_p = xe^{4x}(Ax + B)$$

e observe que

$$\begin{aligned} y_p' &= e^{4x}\left[4Ax^2 + (2A+4B)\,x + B\right] \\ y_p'' &= e^{4x}\left[16Ax^2 + (16A+16B)\,x + 2A + 8B\right] \end{aligned}$$

Substituindo na equação dada, tem-se

$$y_p'' + 2y_p' - 24y_p = -(x+2)\,e^{4x} \Leftrightarrow$$

$$(20Ax + 2A + 10B)\,e^{4x} = -(x+2)\,e^{4x}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} A = -\dfrac{1}{20} \\ B = -\dfrac{19}{100} \end{cases}$$

e, portanto a ***solução particular*** *é*

$$y_p = -xe^{4x}\left(\frac{x}{20} + \frac{19}{100}\right)$$

■

Exercício 4 *A* ***equação auxiliar*** *da equação diferencial* ***homogênea associada*** *é dada por*

$$m^2 + 3m + 2 = 0$$

ou seja

$$\begin{aligned} m_1 &= -1 \\ m_2 &= -2 \end{aligned}$$

e, o conjunto fundamental de soluções é

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{m_1x} \\ &= e^{-x} \\ y_2 &= e^{m_2x} \\ &= e^{-2x} \end{aligned}$$

Usando o ***método da variação de parâmetros****, tem-se que*

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} \\ &= -e^{-3x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, \; f = \operatorname{sen}(e^x) \\ &= \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \operatorname{sen}(e^x) & -2e^{-2x} \end{vmatrix} \\ &= -e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \operatorname{sen}(e^x) \end{vmatrix} \\ &= e^{-x}\operatorname{sen}(e^x) \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} \\ &= \frac{-e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x)}{-e^{-3x}} \\ &= e^{x}\operatorname{sen}(e^x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{W_2}{W} \\ &= \frac{e^{-x}\operatorname{sen}(e^x)}{-e^{-3x}} \\ &= -e^{2x}\operatorname{sen}(e^x) \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} u_1 &= -\cos(e^x) + c_0 \\ u_2 &= e^x\cos(e^x) - \operatorname{sen}(e^x) + c_1 \end{aligned}$$

com $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. Considerando $c_0 = c_1 = 0$, segue-se que, uma ***solução particular*** *da equação é*

$$\begin{aligned} y_p &= y_1u_1 + y_2u_2 \\ &= -e^{-2x}\text{sen}\,(e^x) \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *A* ***equação auxiliar*** *da* ***edo homogênia associada*** *é dada por*

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$

cujas raízes são,

$$m_1 = m_2 = -1$$

Ou seja

$$y_1 = x^{-1}$$

$$y_2 = x^{-1}\ln x$$

e a ***solução complementar*** *da* ***edo*** *é*

$$\begin{aligned} y_c &= c_1y_1 + c_2y_2 \\ &= c_1x^{-1} + c_2x^{-1}\ln x \\ &= x^{-1}\left(c_1 + c_2\ln x\right) \end{aligned}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Usando o ***método da variação de parâmetros*** *para encontrar uma* ***solução particular***, *tem-se que a equação dada em sua forma padrão torna-se*

$$y'' + \frac{3}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x^{-1} & x^{-1}\ln x \\ -x^{-2} & \left(1 - \ln x\right)x^{-2} \end{vmatrix} \\ &= x^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix},\ f = \frac{\ln x}{x^2} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & x^{-1}\ln x \\ \frac{\ln x}{x^2} & \left(1 - \ln x\right)x^{-2} \end{vmatrix} \\ &= -x^{-3}\left(\ln x\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x^{-1} & 0 \\ -x^{-2} & \frac{\ln x}{x^2} \end{vmatrix} \\ &= x^{-3}\ln x \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} \\ &= \frac{-x^{-3}\left(\ln x\right)^2}{x^{-3}} \\ &= -\left(\ln x\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{W_2}{W} \\ &= \frac{x^{-3}\ln x}{x^{-3}} \\ &= \ln x \end{aligned}$$

Ou seja

$$u_1 = -x\left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right) + c_3$$

$$u_2 = x\left(\ln x - 1\right) + c_4$$

com $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. Considerando $c_3 = c_4 = 0$, segue-se que, uma ***solução particular*** *da equação é*

$$\begin{aligned} y_p &= y_1u_1 + y_2u_2 \\ &= \ln x - 2 \end{aligned}$$

e a ***solução geral*** *da* ***edo*** *é então*

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1x^{-1} + c_2x^{-1}\ln x + \ln x - 2 \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma TX

Profº. Edson

3ª Prova **2º Semestre** **2021**

Data: 06 de Setembro de 2022 **Duração: 16:00 - 19:00**

Problema 1 *Determine o* ***intervalo de convergência*** *da série de potências dada por*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{50}}{n!}(x+7)^n$$

Problema 2 *Encontre a* ***solução geral*** *da* ***edo***

$$y'' + 2(1-x)y' - 3xy = 0$$

Problema 3 *Encontre* ***uma solução*** *da equação*

$$2x^2y'' + xy' - (3x+1)y = 0$$

Problema 4 *Calcule*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s^3-1}{(s+2)^2(s^2-9)} \right\}$$

Problema 5 *Resolva o* ***problema de valor inicial***

$$\begin{cases} y'' - y' - 12y = x \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 3ª Prova **2021**
Data: Quinta-feira, 8 de Setembro **Turma TX**

Exercício 1 *Observe que o termo geral desta série é dado por*

$$a_n = \frac{n^{50}}{n!}\,(x+7)^n$$

Disto segue-se que

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^{50}}{(n+1)!}\,(x+7)^{n+1}$$

e

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(n+1)^{50}}{(n+1)!}\,(x+7)^{n+1}\,\frac{n!}{n^{50}\,(x+7)^n}\right| \\ &= \left|\frac{(n+1)^{49}}{n^{50}}\,(x+7)\right| \\ &= \frac{(n+1)^{49}}{n^{50}}\,|x+7|\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{49}}{n^{50}}\,|x+7| \\ &= |x+7|\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{49}}{n^{50}} \\ &= 0\end{aligned}$$

Logo, pelo ***teste da razão****, a série dada será absolutamente convergente quando*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

Ou seja, para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 2 *Observe que* $x = 0$ *é um ponto ordinário para a* ***edo***

$$y'' + 2(1-x)y' - 3xy = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned} y'' + 2(1-x)y' - 3xy = 0 \quad &\Rightarrow \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + & \\ +2(1-x)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 3x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + & \\ \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^{n+1} = 0 \quad &\Rightarrow \\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + & \\ +\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)a_{n+1}x^n - & \\ -\sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n-1}x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\ 2a_2 + 2a_1 + & \\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big[(n+2)(n+1)a_{n+2} + & \\ +2(n+1)a_{n+1} - 2na_n - 3a_{n-1}\Big]x^n = 0 & \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left\{\begin{aligned} 2a_2 + 2a_1 &= 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} &+ \\ +2(n+1)a_{n+1} - 2na_n - 3a_{n-1} &= 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned} &a_2 = -a_1 \\ &a_{n+2} = \frac{-2(n+1)a_{n+1} + 2na_n + 3a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}\right.$$

Tomando $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} a_2 &= \ 0 \\ a_3 &= \ \frac{1}{2} \\ a_4 &= -\frac{1}{4} \\ a_5 &= \ \frac{1}{4} \\ a_6 &= -\frac{1}{10} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{10}x^6 + \cdots \end{aligned}$$

Tomando agora, $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} a_2 &= -1 \\ a_3 &= \ 1 \\ a_4 &= -\frac{7}{12} \\ a_5 &= \ \frac{23}{60} \\ a_6 &= -\frac{11}{60} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= x - x^2 + x^3 - \frac{7}{12}x^4 + \frac{23}{60}x^5 - \frac{11}{60}x^6 + \cdots \end{aligned}$$

E a solução geral da ***edo*** *é dada por*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Observe que $x = 0$ é um ponto singular regular da equação*

$$2x^2 y'' + xy' - (3x+1)\, y = 0$$

Deste modo, considere a seguinte proposta de solução segundo o ***método de Frobenius***

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

e, substituindo na equação, tem-se

$$\begin{aligned} & 2x^2 y'' + xy' - (3x+1)\, y = 0 \quad \Rightarrow \\ & 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} + \\ & + x\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} - (3x+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow \\ & \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} 3 a_n x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow \\ & x^r \left[\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) a_n x^n + \right. \\ & \left. + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3 a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] = 0 \quad \Rightarrow \\ & \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) a_n x^n + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 3 a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow \\ & 2r(r-1) a_0 + r a_0 - a_0 + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r) a_n x^n + \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} 3 a_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow \\ & [2r(r-1) + r - 1]\, a_0 + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [(n+r)(2n+2r-1) - 1]\, a_n - 3a_{n-1} \right\} x^n = 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$\left\{ \begin{aligned} (2r+1)\,(r-1) a_0 &= 0 \\ [(n+r)(2n+2r-1) - 1]\, a_n - 3a_{n-1} &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} & r = 1 \text{ ou } r = -\tfrac{1}{2} \\ & a_n = \frac{3a_{n-1}}{(n+r)(2n+2r-1) - 1} \end{aligned} \right.$$

Supondo $a_0 = 1$ e $r = 1$, tem-se

$$a_n = \frac{3a_{n-1}}{(n+1)(2n+1)-1} = \frac{3a_{n-1}}{n(2n+3)}$$

e,

$$a_0 = 1,\quad a_1 = \frac{3}{5},\quad a_2 = \frac{9}{70},\quad a_3 = \frac{1}{70},\quad a_4 = \frac{3}{3080},\quad a_5 = \frac{9}{200.200},\quad \ldots$$

Ou seja

$$y_1 = x^r\left(a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + \cdots\right) = x\left(1 + \frac{3x}{5} + \frac{9x^2}{70} + \frac{x^3}{70} + \frac{3x^4}{3080} + \cdots\right) = x + \frac{3x^2}{5} + \frac{9x^3}{70} + \frac{x^4}{70} + \frac{3x^5}{3080} + \cdots$$

*é **uma solução** da equação dada.* ■

Exercício 4 *Usando **frações parciais**, observe inicialmente que*

$$\frac{s^3-1}{(s+2)^2(s^2-9)} = \frac{9}{5}\frac{1}{(s+2)^2} - \frac{96}{25}\frac{1}{s+2} + \frac{13}{75}\frac{1}{s-3} + \frac{14}{3}\frac{1}{s+3}$$

Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3-1}{(s+2)^2(s^2-9)}\right\} = \frac{9}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} - \frac{96}{25}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{13}{75}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + \frac{14}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$$

$$= \frac{9}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} - \frac{96}{25}e^{-2t} + \frac{13}{75}e^{3t} + \frac{14}{3}e^{-3t}$$

(***Obs.:*** *Quem chegou até aqui obteve 100% da questão.)*

Ou seja,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3-1}{(s+2)^2(s^2-9)}\right\} = \tfrac{9}{5}te^{-2t} - \tfrac{96}{25}e^{-2t} + \tfrac{13}{75}e^{3t} + \tfrac{14}{3}e^{-3t}$$

■

Exercício 5 *Utilizando a **Transformada de Laplace** para a resolução desta equação, observe que*

$$\mathcal{L}\{y'' - y' - 12y\} = \mathcal{L}\{x\} \quad\Leftrightarrow$$
$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 12\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{x\}$$

Considerando

$$Y = \mathcal{L}\{y\},$$

a equação anterior pode ser reescrita como

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) - [sY - y(0)] - 12Y = \frac{1}{s^2} \Rightarrow$$
$$\left(s^2 - s - 12\right)Y + s - 1 = \frac{1}{s^2} \Rightarrow$$
$$Y = \frac{-s^3 + s^2 + 1}{s^2\left(s^2 - s - 12\right)}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}^{-1}\left\{Y\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-s^3+s^2+1}{s^2\left(s^2-s-12\right)}\right\} \end{aligned}$$

Usando ***frações parciais****, tem-se que*

$$\begin{aligned} \frac{-s^3+s^2+1}{s^2\left(s^2-s-12\right)} = \frac{1}{144s} - \frac{47}{112\left(s-4\right)} - \\ - \frac{37}{63\left(s+3\right)} - \frac{1}{12s^2} \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{144}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{47}{112}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} - \\ - \frac{37}{63}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - \frac{1}{12}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \\ = \frac{1}{144} - \frac{47}{112}e^{4x} - \frac{37}{63}e^{-3x} - \frac{1}{12}x \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma M4 e TX

Prof$^{\text{o}}$. Edson

Prova Final | **2$^{\text{o}}$ Semestre** | **2021**

Data: 12 de Setembro de 2022 | **Duração: 14:00 - 17:00**

Problema 1 *Encontre a* ***solução geral*** *da equação*

$$\left(ye^{-x}+1\right)dx+xe^{-x}dy=0$$

Problema 2 *Sabendo que a função* $y_1 = x^2 - 1$ *é uma solução da equação*

$$(x^2-1)y''-2y=0$$

Encontre outra solução desta ***edo****, que seja linearmente independente de* y_1.

Problema 3 *Encontre uma* ***solução particular*** *da equação*

$$y''+5y'+6y=x^2e^{-x}$$

Problema 4 *Encontre a* ***solução geral*** *da equação*

$$y''+x^2y'+2xy=0$$

Problema 5 *Resolva o* ***problema de valor inicial***

$$\begin{cases} y''-y'-12y=x \\ y(0)=-1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito Prova Final **2021**
Data: Segunda-feira, 12 de Setembro **Turmas M4 e TX**

Exercício 1 *Considere a diferencial*

$$\left(ye^{-x}+1\right)dx+xe^{-x}dy=0$$

Tem-se que

$$M(x,y)=ye^{-x}+1$$

$$N(x,y)=xe^{-x}$$

e observe que

$$M_y=e^{-x}$$

$$N_x=(1-x)\,e^{-x}$$

e, além disso,

$$\frac{M_y-N_x}{N}=1$$

*O que significa dizer que a equação dada pode se tornar **exata** e seu **fator integrante** é dado por*

$$\mu(x)=e^{\int\left(\frac{M_y-N_x}{N}\right)dx}$$

$$=e^{\int dx}$$

$$=e^{x+c_0}$$

$$=c_1e^{x}$$

com $c_1=e^{c_0}$ *e* $c_0\in\mathbb{R}$*. Escolhendo* $c_1=1$ *e multiplicando a equação (**??**) por* μ*, tem-se*

$$\left(y+e^{x}\right)dx+xdy=0$$

*que é **exata**. Para encontrar as soluções desta equação é necessário resolver o seguinte sistema*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=y+e^{x}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=x\end{cases}$$

Integrando em relação à y *a segunda equação do sistema, obtêm-se*

$$f(x,y)=xy+k(x)$$

Donde segue-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y+k'(x)$$

Comparando este resultado com a primeira equação do sistema, tem-se que

$$k'(x)=e^{x}\Leftrightarrow k(x)=e^{x}+c_1$$

com $c_1\in\mathbb{R}$*. Assim,*

$$f(x,y)=xy+k(x)$$

$$=xy+e^{x}+c_1$$

*e a solução da **edo** em questão é dada por*

$$f(x,y)=c_2,\ c_2\in\mathbb{R}$$

Ou seja,

$$xy+e^{x}+c_1=c_2$$

$$xy+e^{x}=c$$

$$y=\frac{c-e^{x}}{x}$$

Com $c\in\mathbb{R}$*.* ■

Exercício 2 *Observe que a equação*

$$(x^2-1)y''-2y=0$$

*pode ser reescrita em sua **forma padrão** da seguinte forma,*

$$y''+0\,y'-\frac{2}{x^2-1}y=0$$

onde

$$P(x)=0$$

Deseja-se encontrar uma outra solução desta equação sabendo que

$$y_1=x^2-1$$

*é uma solução. Usando o método da **redução de ordem**, considere*

$$\eta(x)=\int -P(x)dx$$

$$=\int 0dx$$

$$=c_0$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$. Disto segue-se que

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\mu(x)} \\ &= e^{c_0} \\ &= c_1\end{aligned}$$

onde $c_1 = e^{c_0}$. Tomando $c_1 = 1$, tem-se,

$$\begin{aligned}u(x) &= \int \frac{\mu(x)}{y_1^2}dx \\ &= \int \frac{dx}{\left(x^2-1\right)^2} \\ &= \int \left(\frac{1}{4\left(x+1\right)} - \frac{1}{4\left(x-1\right)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\left(x-1\right)^2} + \frac{1}{4\left(x+1\right)^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x-1| - \\ &\quad - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2\left(x+1\right)} + c_2 \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{x}{x^2-1} + c_2\end{aligned}$$

Tomando $c_2 = 0$, segue-se que,

$$\begin{aligned}y_2(x) &= y_1(x)u(x) \\ &= \frac{1}{4}\left(x^2-1\right)\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - x\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exercício 3 *Deseja-se encontrar uma* ***solução particular*** *y_p da equação diferencial*

$$y'' + 5y' + 6y = x^2e^{-x}$$

Considere

$$y_p = \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{-x}$$

e observe que

$$\begin{aligned}y' &= \left[-Ax^2 + \left(2A-B\right)x + B - C\right]e^{-x} \\ y'' &= \left[Ax^2 - \left(4A-B\right)x + 2A - 2B + C\right]e^{-x}\end{aligned}$$

Substituindo na equação dada, tem-se

$$y'' + 5y' + 6y = x^2e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$\left\{2Ax^2 + \left(6A+2B\right)x + 2A + 3B + 2C\right\}e^{-x} = x^2e^{-x} \Leftrightarrow$$

Ou seja,

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = -\dfrac{3}{2} \\ C = \dfrac{7}{4} \end{cases}$$

e, portanto a ***solução particular*** *é*

$$y_p = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right)e^{-x}$$

$\square$

(Outro Modo:)

A ***equação auxiliar*** *da equação diferencial* ***homogênea associada*** *é dada por*

$$m^2 + 5m + 6 = 0$$

ou seja

$$\begin{aligned}m_1 &= -2 \\ m_2 &= -3\end{aligned}$$

e, o conjunto fundamental de soluções é

$$\begin{aligned}y_1 &= e^{m_1x} \\ &= e^{-2x} \\ y_2 &= e^{m_2x} \\ &= e^{-3x}\end{aligned}$$

Usando o ***método da variação de parâmetros****, tem-se que*

$$\begin{aligned}W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-3x} \\ -2e^{-2x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} \\ &= -e^{-5x}\end{aligned}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, \; f = x^2e^{-x}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & e^{-3x} \\ x^2e^{-x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix}$$

$$= -x^2e^{-4x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & x^2e^{-x} \end{vmatrix}$$

$$= x^2e^{-3x}$$

e,

$$u_1' = \frac{W_1}{W}$$

$$= \frac{-x^2e^{-4x}}{-e^{-5x}}$$

$$= x^2e^x$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W}$$

$$= \frac{x^2e^{-3x}}{-e^{-5x}}$$

$$= -x^2e^{2x}$$

Ou seja

$$u_1 = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + c_0$$

$$u_2 = -\frac{1}{4}e^{2x}\left(2x^2 - 2x + 1\right) + c_1$$

com $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$*. Considerando* $c_0 = c_1 = 0$*, segue-se que, uma **solução particular** da equação é*

$$y_p = y_1u_1 + y_2u_2$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right)e^{-x}$$

■

Exercício 4 *Observe que* $x = 0$ *é um ponto ordinário para a **edo***

$$y'' + x^2y' + 2xy = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned} y'' + x^2y' + 2xy = 0 \quad &\Rightarrow \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + \\ +x^2\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} + 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0 \quad &\Rightarrow \\ \sum_{n=-1}^{\infty}(n+3)(n+2)a_{n+3}x^{n+1} + \\ \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_nx^{n+1} = 0 \quad &\Rightarrow \\ 2a_2 + 6a_3x + 2a_0x + \sum_{n=1}^{\infty}(n+3)(n+2)a_{n+3}x^{n+1} + \\ +\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_nx^{n+1} = 0 \quad &\Rightarrow \\ 2a_2 + (6a_3 + 2a_0)\,x + \\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+3)(n+2)a_{n+3}\right. \\ \left. +na_n + 2a_n\right]x^{n+1} = 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} 2a_2 = 0 \\ 6a_3 + 2a_0 = 0 \\ (n+3)(n+2)a_{n+3} + (n+2)\,a_n = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ a_3 = -\dfrac{a_0}{3} \\ a_{n+3} = \dfrac{-a_n}{n+3} \end{cases}$$

Tomando $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} a_2 &= 0 \\ a_3 &= -\frac{1}{3} \\ a_4 &= 0 \\ a_5 &= 0 \\ a_6 &= \frac{1}{18} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^6 + \cdots \end{aligned}$$

Tomando agora, $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} a_2 &= 0 \\ a_3 &= 0 \\ a_4 &= -\frac{1}{4} \\ a_5 &= 0 \\ a_6 &= 0 \\ a_7 &= \frac{1}{28} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= x - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{28}x^7 - \cdots \end{aligned}$$

*E a solução geral da **edo** é dada por*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Utilizando a **Transformada de Laplace** para a resolução desta equação, observe que*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{y'' - y' - 12y\right\} = &\quad \mathcal{L}\left\{x\right\} \quad \Leftrightarrow \\ \mathcal{L}\left\{y''\right\} - \mathcal{L}\left\{y'\right\} - 12\mathcal{L}\left\{y\right\} = &\quad \mathcal{L}\left\{x\right\} \end{aligned}$$

Considerando

$$Y = \mathcal{L}\left\{y\right\},$$

a equação anterior pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} s^2 Y - sy(0) - y'(0) - [sY - y(0)] - 12Y = &\ \frac{1}{s^2} \ \Rightarrow \\ \left(s^2 - s - 12\right) Y + s - 1 = &\ \frac{1}{s^2} \ \Rightarrow \\ Y = &\ \frac{-s^3 + s^2 + 1}{s^2\left(s^2 - s - 12\right)} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}^{-1}\left\{Y\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-s^3 + s^2 + 1}{s^2\left(s^2 - s - 12\right)}\right\} \end{aligned}$$

*Usando **frações parciais**, tem-se que*

$$\begin{aligned} \frac{-s^3 + s^2 + 1}{s^2\left(s^2 - s - 12\right)} = \frac{1}{144s} - \frac{47}{112\left(s-4\right)} - \\ - \frac{37}{63\left(s+3\right)} - \frac{1}{12s^2} \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} y = &\ \frac{1}{144}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{47}{112}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} - \\ &- \frac{37}{63}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - \frac{1}{12}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \\ = &\ \frac{1}{144} - \frac{47}{112}e^{4x} - \frac{37}{63}e^{-3x} - \frac{1}{12}x \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma C4

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1ª Prova **1º Semestre** **2022**

Data: 10 de Novembro **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Resolva a equação diferencial*

$$e^{-y}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=1$$

Problema 2 *Resolva o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} xy' + 2y = \operatorname{sen} x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Problema 3 *Resolva a equação*

$$y(x+y)dx + (xy+1)dy = 0$$

Problema 4 *Resolva a equação*

$$y^2 + x^2y' = xyy'$$

Problema 5 *Resolva a equação*

$$(x+1)(y'+y^2) = -y$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 1ª Prova **2022**
Data: Sexta-feira, 11 de Novembro **Turma C4**

Exercício 1 *Observe que a equação diferencial*

$$e^{-y}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=1$$

pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} 1+\frac{dy}{dx} &= e^{y} && \Rightarrow \\ \frac{dy}{dx} &= e^{y}-1 && \Rightarrow \\ \frac{dy}{e^{y}-1} &= dx \end{aligned}$$

Ou seja, tem-se uma equação de ***variáveis separáveis****, cuja solução é dada por*

$$\begin{aligned} \int\frac{dy}{e^{y}-1} &= \int dx && \Rightarrow \\ \ln\left|\frac{e^{y}-1}{e^{y}}\right| &= x+c_0 && \Rightarrow \\ \left|\frac{e^{y}-1}{e^{y}}\right| &= e^{x+c_0} && \Rightarrow \\ \frac{e^{y}-1}{e^{y}} &= \pm e^{c_0}e^{x} && \Rightarrow \\ (1-c_1e^{x})\,e^{y} &= 1 && \Rightarrow \\ e^{y} &= \frac{1}{1-c_1e^{x}} && \Rightarrow \\ y &= \ln\left(\frac{1}{1-c_1e^{x}}\right) && \Rightarrow \\ y &= \ln 1-\ln(1-c_1e^{x}) && \Rightarrow \\ y &= -\ln(1-c_1e^{x}) \end{aligned}$$

Onde $c_1=\pm e^{c_0}$ *e* $c_0\in\mathbb{R}$. ■

Exercício 2 *Deseja-se resolver o seguinte* ***problema de valor inicial****,*

$$\begin{cases} xy'+2y=\operatorname{sen}x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \end{cases}$$

Para isto, observe inicialmente que a equação

$$xy'+2y=\operatorname{sen}x$$

pode ser reescrita como

$$y'+\frac{2}{x}y=\frac{\operatorname{sen}x}{x}$$

ou seja, trata-se de uma ***equação linear****, onde*

$$p(x)=\frac{2}{x}$$

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}x}{x}$$

Desta forma, considere

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int p(x)dx \\ &= \int\frac{2}{x}dx \\ &= 2\ln|x|+c_0,\ c_0\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Tomando $c_0=0$*, tem-se*

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{2\ln|x|} \\ &= x^2 \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} q(x) &= \int\mu(x)f(x)dx \\ &= \int x\operatorname{sen}x\,dx \\ &= \operatorname{sen}x-x\cos x+c_1,\ c_1\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{q(x)}{\mu(x)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}x-x\cos x+c_1}{x^2} \end{aligned}$$

Como deseja-se que $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$*, segue-se que*

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+c_1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\Rightarrow$$

$$c_1=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1$$

Portanto

$$y(x) = \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 1}{x^2}$$

$\blacksquare$

Exercício 3 *Para a resolução da equação*

$$y(x+y)dx + (xy+1)dy = 0$$

Considere

$$M(x,y) = y(x+y)$$

$$N(x,y) = xy+1$$

e observe que

$$N_x = y$$

$$M_y = x + 2y$$

e

$$\varphi(y) = \frac{N_x - M_y}{M} = \frac{-1}{y}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \eta(y) &= \int \varphi(y)dy \\ &= \int \frac{-1}{y}dy \\ &= -\ln|y| + c_0, \ c_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mu(y) &= e^{\eta(y)} \\ &= e^{-\ln|y| + c_0} \\ &= |y|^{-1} e^{c_0} \\ &= \frac{\pm e^{c_0}}{y} \\ &= \frac{c_1}{y} \end{aligned}$$

onde $c_1 \in \mathbb{R}_*$. Tomando $c_1 = 1$ e multiplicando a equação dada por μ, tem-se

$$(x+y)dx + \left(x + \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

que, agora é ***exata****. Logo, existe uma função $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = x + y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x + \dfrac{1}{y} \end{cases}$$

Ou seja,

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + \ln|y| + c_2, \ c_2 \in \mathbb{R}$$

e a solução da equação em questão é, portanto

$$f(x,y) = c_3 \ c_3 \in \mathbb{R}$$

Ou seja

$$\frac{x^2}{2} + xy + \ln|y| = c, \ c \in \mathbb{R}$$

$\blacksquare$

Exercício 4 *Observe que a equação diferencial*

$$y^2 + x^2y' = xyy'$$

pode ser reescrita como

$$y^2dx + \left(x^2 - xy\right)dy = 0,$$

que é uma ***equação homogênea****. Colocando x^2 em evidênvia, tem-se*

$$x^2\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2 dx + \left(1 - \frac{y}{x}\right)dy\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 dx + \left(1 - \frac{y}{x}\right)dy = 0$$

Considere

$$u = \frac{y}{x}$$

e observe que

$$y = u\,x$$

e

$$dy = x\,du + u\,dx$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$u^2dx + (1-u)\,(x\,du + u\,dx) = 0 \Rightarrow$$

$$udx + (1-u)\,xdu = 0$$

Tem-se portanto, uma equação separável, donde segue-se que

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{x} =& \frac{(u-1)}{u}du && \Rightarrow \\
\int \frac{dx}{x} =& \int \frac{(u-1)}{u}du && \Rightarrow \\
\ln|x| =& u - \ln|u| + c_0 && \Rightarrow \\
\ln|xu| =& u + c_0 && \Rightarrow \\
xu =& \pm e^{c_0} e^{u} && \Rightarrow \\
y =& c_1 e^{\frac{y}{x}}
\end{aligned}$$

onde $c_1 = \pm e^{c_0}$ *e* $c_0 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Observe que a equação*

$$(x+1)(y' + y^2) = -y$$

pode ser reescrita da seguinte maneira

$$y' + \frac{1}{x+1}y = -y^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y^2}y' + \frac{1}{x+1}\frac{1}{y} = -1$$

Ou seja, tem-se uma ***equação de Bernoulli****. Considere a seguinte mudança de variável*

$$u = \frac{1}{y}$$

disto segue-se,

$$u' = -\frac{1}{y^2}y'$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$u' - \frac{1}{x+1}u = 1,$$

que é uma equação linear com

$$p(x) = -\frac{1}{x+1}$$

$$f(x) = 1$$

Considere portanto,

$$\begin{aligned}
\eta(x) &= \int p(x)dx \\
&= -\int \frac{dx}{x+1} \\
&= -\ln|x+1| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= e^{\eta(x)} \\
&= e^{-\ln|x+1|+c_0} \\
&= \frac{e^{c_0}}{|x+1|} \\
&= \frac{\pm e^{c_0}}{x+1} \\
&= \frac{c_1}{x+1},\ c_1 = \pm e^{c_0}
\end{aligned}$$

Tomando $c_1 = 1$*, segue-se que*

$$\begin{aligned}
q(x) &= \int \mu(x) f(x) dx \\
&= \int \frac{dx}{x+1} \\
&= \ln|x+1| + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{q(x)}{\mu(x)} \\
&= (x+1)\left(\ln|x+1| + c_2\right)
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{1}{y} = (x+1)\left(\ln|x+1| + c_2\right) \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{(x+1)\left(\ln|x+1| + c_2\right)}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma C4

Prof. Edson

2ª Prova **1º Semestre** **2022**

Data: 24 de Janeiro de 2023 **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Sabendo que a função* $y_1 = x$ *é uma solução da equação*

$$x^2y'' - (x^2 + 2x)y' + (x + 2)y = 0$$

Encontre outra solução desta ***edo****, que seja linearmente independente de* y_1.

Problema 2 *Resolva a equação*

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

Problema 3 *Encontre uma* ***solução particular*** *para a equação*

$$y'' - 2y' + 2y = x\cos x$$

Problema 4 *Encontre uma* ***solução particular*** *para a equação*

$$y'' - 2y' + y = e^x\sqrt{x}$$

Problema 5 *Resolva a equação*

$$x^2y'' + 5xy' + 8y = 0$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito 2ª Prova **2022**
Data: Quarta-feira, 1 de Fevereiro de 2023 **Turma C4**

Exercício 1 *Observe que a equação*

$$x^2y'' - (x^2+2x)y' + (x+2)y = 0$$

pode ser reescrita em sua ***forma padrão*** *da seguinte forma,*

$$y'' - \frac{x^2+2x}{x^2}y' + \frac{x+2}{x^2}y = 0$$

onde

$$\begin{aligned} P(x) &= -\frac{x^2+2x}{x^2} \\ &= -\frac{x+2}{x} \end{aligned}$$

Deseja-se encontrar uma outra solução desta equação sabendo que

$$y_1 = x$$

é uma solução. Usando o método da ***redução de ordem****, considere*

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int -P(x)dx \\ &= \int \frac{x+2}{x}dx = \int 1 + \frac{2}{x}dx \\ &= x + 2\ln|x| + c_0 \end{aligned}$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$. Disto segue-se que

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{x+2\ln|x|+c_0} \\ &= e^x e^{\ln|x|^2} e^{c_0} \\ &= e^x x^2 e^{c_0} \\ &= c_1 x^2 e^x \end{aligned}$$

onde $c_1 = e^{c_0}$. Tomando $c_1 = 1$, tem-se,

$$\begin{aligned} u(x) &= \int \frac{\mu(x)}{y_1^2}dx \\ &= \int \frac{x^2e^x}{x^2}dx \\ &= e^x + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tomando $c_2 = 0$, segue-se que,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x)u(x) \\ &= xe^x \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *A* ***equação auxiliar*** *da* ***edo*** *em questão é dada por*

$$m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = 0,$$

Observe que

$$m_1 = 1$$

é uma solução desta equação e

$$m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = (m-1)\left(m^2 - 5m + 6\right)$$

Ou seja, as outras soluções desta equação são a raízes da equação

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

que são

$$m_2 = 2$$

$$m_3 = 3$$

Assim, o ***conjunto fundamental de soluções*** *da equação diferencial em questão é*

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{m_1x} \\ &= e^x \\ y_2 &= e^{m_2x} \\ &= e^{2x} \\ y_3 &= e^{m_3x} \\ &= e^{3x} \end{aligned}$$

Logo, a ***solução geral*** *da equação é*

$$\begin{aligned} y &= c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 \\ &= c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} \end{aligned}$$

com c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Deseja-se encontrar uma* ***solução particular*** y_p *da equação diferencial*

$$y'' - 2y' + 2y = x\cos x$$

Considere

$$y_p = A\sin x + B\cos x + Cx\sin x + Dx\cos x$$

e observe que

$$y' = (D+A)\cos x + (C-B)\sin x - Dx\sin x + \\ + Cx\cos x$$

$$y'' = (2C-B)\cos x - (2D+A)\sin x - Dx\cos x - \\ - Cx\sin x$$

Substituindo na equação dada, tem-se

$$y'' - 2y' + 2y = x\cos x \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}&(-2A+B+2C-2D)\cos x + \\ &+(A+2B-2C-2D)\sin x + \\ &+(-2C+D)x\cos x + (C+2D)\,x\sin x = x\cos x\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} -2A+B+2C-2D = 0 \\ A+2B-2C-2D = 0 \\ -2C+D = 1 \\ C+2D = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A = -\dfrac{14}{25} \\ B = \dfrac{2}{25} \\ C = -\dfrac{2}{5} \\ D = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

e, portanto a ***solução particular*** *é*

$$\begin{aligned} y_p &= -\frac{14}{25}\sin x + \frac{2}{25}\cos x - \frac{2}{5}x\sin x + \frac{1}{5}x\cos x \\ &= -\left(\frac{14}{25} + \frac{2}{5}x\right)\sin x + \left(\frac{2}{25} + \frac{1}{5}x\right)\cos x \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *A* ***equação auxiliar*** *da equação difierencial* ***homogênea associada*** *é dada por*

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 0$$

ou seja

$$m_1 = m_2 = 1$$

e, o conjunto fundamental de soluções é

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{m_1 x} \\ &= e^x \\ y_2 &= xy_1 \\ &= xe^x \end{aligned}$$

Usando o ***método da variação de parâmetros****, tem-se que*

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (1+x)\,e^x \end{vmatrix} \\ &= e^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, \ f = e^x\sqrt{x} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ e^x\sqrt{x} & (1+x)\,e^x \end{vmatrix} \\ &= -xe^{2x}\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^x\sqrt{x} \end{vmatrix} \\ &= e^{2x}\sqrt{x} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} \\ &= \frac{-xe^{2x}\sqrt{x}}{e^{2x}} \\ &= -x\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{e^{2x}\sqrt{x}}{e^{2x}} = \sqrt{x}$$

Ou seja

$$u_1 = -\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + c_0$$

$$u_2 = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c_1$$

com $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. *Considerando* $c_0 = c_1 = 0$ *e* $x > 0$, *segue-se que, uma* ***solução particular*** *da equação é*

$$y_p = y_1u_1 + y_2u_2 = -\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}e^x + \frac{2}{3}x^2\sqrt{x}e^x = \frac{4}{15}x^2\sqrt{x}e^x$$

■

Exercício 5 *Sendo a equação dada um Equação de Euler, segue-se que a* ***equação auxiliar*** *desta é dada por*

$$m^2 + 4m + 8 = 0$$

cujas raízes são,

$$m_1 = -2 + 2i$$

$$m_2 = -2 - 2i$$

Ou seja

$$\alpha = -2$$

$$\beta = 2$$

$$y_1 = x^\alpha \cos(\beta \ln x) = x^{-2}\cos(2\ln x)$$

$$y_2 = x^\alpha \sin(\beta \ln x) = x^{-2}\sin(2\ln x)$$

e a ***solução geral*** *é*

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1x^{-2}\cos(2\ln x) + c_2x^{-2}\sin(2\ln x) = \frac{1}{x^2}\left[c_1\cos(2\ln x) + c_2\sin(2\ln x)\right]$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma C4

Prof^{o}. Edson

3^{a} Prova **2^{o} Semestre** **2022**

Data: Terça-feira, 28 de Fevereiro de 2023 **Duração: 14:00 - 17:00**

Problema 1 *Calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$ sabendo que*

$$f(t) = \begin{cases} t,\ 0 < t < 1 \\ t^2,\ 1 < t < 2 \\ 0,\ t > 2 \end{cases}$$

Problema 2 *Determine o* ***intervalo de convergência*** *da série de potências dada por*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Problema 3 *Encontre a* ***solução geral*** *da* ***edo***

$$(x+2)\,y'' + xy' - y = 0$$

Problema 4 *Encontre* ***uma solução*** *da equação*

$$xy'' - x^2y' + (x^2-2)y = 0$$

Problema 5 *Resolva o* ***problema de valor inicial***

$$\begin{cases} y' = y^2 - x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 3ª Prova **2022**
Data: Sábado, 4 de Março **Turma C4**

Exercício 1 *Usando a definição da Transformada de Laplace, segue-se que*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

$$= \int_0^1 e^{-st} f(t)dt + \int_1^2 e^{-st} f(t)dt + + \int_2^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

$$= \underbrace{\int_0^1 te^{-st}dt}_{A} + \underbrace{\int_1^2 t^2e^{-st}dt}_{B} + \underbrace{\int_2^{+\infty} 0e^{-st}dt}_{0}$$

$$= A + B$$

Resolvendo a integral A, tem-se

$$A = \int_0^1 te^{-st}dt$$

$$= -\frac{1}{s^2}e^{-st}(st+1)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s}(s+1)$$

Resolvendo a integral B, tem-se

$$B = \int_1^2 t^2e^{-st}dt$$

$$= -\frac{1}{s^3}e^{-st}\left(s^2t^2+2st+2\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{s^3}\left[e^{-s}\left(s^2+2s+2\right) - e^{-2s}\left(4s^2+4s+2\right)\right]$$

Logo

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = A + B$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s}(s+1) + + \frac{1}{s^3}e^{-s}\left(s^2+2s+2\right) - - e^{-2s}\left(4s^2+4s+2\right)$$

$$= \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}e^{-s}(s+2) - - \frac{1}{s^3}e^{-2s}\left(4s^2+4s+2\right)$$

■

Exercício 2 *Observe que o **termo geral** desta série é dado por*

$$a_n = \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Disto segue-se que

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

e

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{(2n-1)!}{(-1)^n x^{2n-1}}\right|$$

$$= \left|\frac{-x^2}{(2n+1)2n}\right|$$

$$= \frac{1}{2n(2n+1)}|x|^2$$

Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}|x|^2$$

$$= |x|^2 \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}$$

$$= 0$$

*Logo, pelo **teste da razão**, a série dada será **absolutamente convergente** quando*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

Ou seja, para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Observe que $x = 0$ é um **ponto ordinário** para a **edo***

$$(x+2)y'' + xy' - y = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$(x+2)y'' + xy' - y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &(x+2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \\ &+x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \\ &+\sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1)a_n x^{n-2} + \\ &+\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n a_{n+1} x^n + \\ &+\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \\ &+\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &4a_2 - a_0 + \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[(n+1)n a_{n+1} + 2(n+2)(n+1)a_{n+2} + \\ &+ (n-1)\,a_n\Big] x^n = 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} 4a_2 - a_0 = 0 \\ (n+1)n a_{n+1} + 2(n+2)(n+1)a_{n+2} + \\ \quad + (n-1)\,a_n = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{a_0}{4} \\ a_{n+2} = \dfrac{-(n+1)n a_{n+1} - (n-1)\,a_n}{2(n+2)(n+1)} \end{cases}$$

Tomando $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{4} \\ a_3 &= -\frac{1}{24} \\ a_4 &= 0 \\ a_5 &= \frac{1}{480} \\ a_6 &= -\frac{1}{1440} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{480}x^5 - \frac{1}{1440}x^6 + \cdots \end{aligned}$$

Tomando agora, $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} a_2 &= 0 \\ a_3 &= 0 \\ a_4 &= 0 \\ a_5 &= 0 \\ a_6 &= 0 \\ &\cdots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= x \end{aligned}$$

*E a solução geral da **edo** é dada por*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 4 *Observe que $x = 0$ é um ponto singular regular da equação*

$$xy'' - x^2y' + \left(x^2 - 2\right) y = 0$$

Deste modo, considere a seguinte proposta de solução segundo o ***método de Frobenius****,*

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

e, substituindo na equação, tem-se

$$xy'' - x^2y' + \left(x^2 - 2\right) y = 0 \Rightarrow$$

$$x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} - $$
$$-x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \left(x^2-2\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} -$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r+1} +$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty}2a_n x^{n+r} = 0 \Rightarrow$$

$$x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} -\right.$$
$$\left.-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty}2a_n x^{n}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)(n+r)a_{n+1}x^n -$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}2a_n x^n = 0 \Rightarrow$$

$$r(r-1)a_0x^{-1} + r(r+1)a_1 +$$
$$+(r+2)(r+1)a_2x - ra_0x +$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}(n+r+1)(n+r)a_{n+1}x^n -$$
$$-\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^n -$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n - 2a_0 - 2a_1x - \sum_{n=2}^{\infty}2a_n x^n = 0 \Rightarrow$$

$$r(r-1)a_0x^{-1} + r(r+1)a_1 +$$
$$+(r+2)(r+1)a_2x - ra_0x -$$
$$-2a_0 - 2a_1x +$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\{(n+r+1)(n+r)a_{n+1} -$$
$$-(n+r-1)a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_n\}\, x^n = 0$$

Logo,

$$\left\{\begin{aligned} r(r-1)a_0 &= 0\\ r(r+1)a_1 - 2a_0 &= 0\\ (r+2)(r+1)a_2 - ra_0 - 2a_1 &= 0\\ (n+r+1)(n+r)a_{n+1} &-\\ -(n+r-1)a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_n &= 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned} & r = 0 \text{ ou } r = 1\\ & a_1 = \frac{2}{r(r+1)}a_0\\ & a_2 = \frac{ra_0 + 2a_1}{(r+2)(r+1)}\\ & a_{n+1} = \frac{(n+r-1)a_{n-1} - a_{n-2} + 2a_n}{(n+r+1)(n+r)} \end{aligned}\right.$$

Supondo $a_0 = 1$ e $r = 1$, tem-se

$$a_{n+1} = \frac{na_{n-1} - a_{n-2} + 2a_n}{(n+2)(n+1)}$$

e,

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = \frac{1}{2}$$
$$a_3 = \frac{1}{6}$$
$$a_4 = \frac{1}{24}$$
$$a_5 = \frac{1}{120}$$
$$a_6 = \frac{1}{720}$$
$$\ldots$$

Ou seja

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x^r\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots\right)\\
&= x\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\cdots\right)\\
&= x+x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{24}x^5+\frac{1}{120}x^6+\cdots
\end{aligned}
$$

*é **uma solução** da equação dada.* ■

Exercício 5 *Considere como proposta de solução a seguinte função*

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

*Como y é uma **Série de Taylor** em torno de $x=0$, segue-se que*

$$a_n=\frac{y^{(n)}(0)}{n!}$$

De acordo com o enunciado do problema sabe-se que

$$y(0)=1$$

e

$$y'=y^2-x\Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
y'(0) &= y(0)^2-0\\
&= 1
\end{aligned}
$$

Assim, derivando a equação dada, em relação a x, tem-se

$$y''=2yy'-1\Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
y''(0) &= 2y(0)y'(0)-1\\
&= 1
\end{aligned}
$$

Repetindo o procedimento, tem-se

$$y'''=2\left(y'\right)^2+2yy''\Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
y'''(0) &= 2y'(0)^2-2y(0)y''(0)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$y^{iv}=6y'y''+2yy'''\Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
y^{iv}(0) &= 6y'(0)y''(0)+2y(0)y'''(0)\\
&= 6
\end{aligned}
$$

$$y^{v}=6\left(y''\right)^2+8y'y'''+2yy^{iv}\Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
y^{v}(0) &= 6y''(0)^2+8y'(0)y'''(0)+2y(0)y^{iv}(0)\\
&= 18\\
&\cdots
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
a_0 &= y(0)\\
&= 1\\[1em]
a_1 &= \frac{y'(0)}{1!}\\
&= 1\\[1em]
a_2 &= \frac{y''(0)}{2!}\\
&= \frac{1}{2}\\[1em]
a_3 &= \frac{y'''(0)}{3!}\\
&= 0\\[1em]
a_4 &= \frac{y^{iv}(0)}{4!}\\
&= \frac{1}{4}\\[1em]
a_5 &= \frac{y^{v}(0)}{5!}\\
&= \frac{3}{20}\\
&\cdots
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
y &= a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots\\
&= 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{20}x^5+\cdots
\end{aligned}
$$

*(**Obs.:** Esta questão tinha por objetivo explorar a **Transformada de Laplace** como método de resolução. Porém, por conta do "y^2" que há na equação, seu uso não é possível. Apesar da solução apresentada estar dentro do conteúdo ensinado, como não apresentei tal método de resolução em sala, considero a **questão cancelada** e a **pontuação** correspondente **concedida a todos** que estiveram presentes na prova.)* ■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma C4

Prof^{o}. Edson

Prova Final | **2^{o} Semestre** | **2022**

Data: Terça-feira, 07 de Março de 2023 | **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Encontre a solução geral da equação*

$$(2x+1)y' = 4x + 2y$$

Problema 2 *Encontre a **solução geral** da **edo***

$$y'' - 3y' + 3y = 0$$

Problema 3 *Encontre uma **solução particular** da **edo***

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}$$

Problema 4 *Encontre **uma solução** da equação*

$$xy'' - x^2y' + (x^2-2)y = 0$$

Problema 5 *Resolva o **problema de valor inicial***

$$\begin{cases} x'' + 4x = \operatorname{sen} 3t \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito Prova Final **2022**
Data: Quarta-feira, 08 de Março de 2023 **Turma C4**

Exercício 1 *A equação dada pode ser reescrita como*

$$y' - \frac{2}{2x+1}y = \frac{4x}{2x+1}$$

*o que demonstra que esta é uma **edo** de 1ª ordem **linear**, com*

$$p(x) = -\frac{2}{2x+1}$$

$$f(x) = \frac{4x}{2x+1}$$

Desta forma, considere

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \int p(x)dx \\ &= \int -\frac{2}{2x+1}dx \\ &= -\ln|2x+1| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{-\ln|2x+1|+c_0} \\ &= e^{\ln|2x+1|^{-1}+c_0} \\ &= \frac{e^{c_0}}{|2x+1|} \\ &= \frac{\pm e^{c_0}}{2x+1} \\ &= \frac{c_1}{2x+1},\ c_1 = \pm e^{c_0}\end{aligned}$$

Tomando-se $c_1 = 1$, tem-se,

$$\begin{aligned}q(x) &= \int \mu(x)f(x)dx \\ &= \int \frac{4x}{(2x+1)^2}dx \\ &= \ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{q(x)}{\mu(x)} \\ &= (2x+1)\ln|2x+1| + c_2(2x+1) + 1\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *A **equação auxiliar** da **edo** em questão é dada por*

$$m^2 - 3m + 3 = 0,$$

cujas raízes são

$$m_2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$m_3 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ou seja

$$\alpha = \frac{3}{2}$$
$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

*e o **conjunto fundamental de soluções** é,*

$$\begin{aligned}y_1 &= e^{\alpha x}\text{sen}\,\beta x \\ &= e^{\frac{3x}{2}}\text{sen}\,\frac{\sqrt{3}x}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_2 &= e^{\alpha x}\cos\beta x \\ &= e^{\frac{3x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}\end{aligned}$$

*e a **solução geral** da equação é dada por*

$$\begin{aligned}y &= c_1y_1 + c_1y_2 \\ &= c_1e^{\frac{3x}{2}}\text{sen}\,\frac{\sqrt{3}x}{2} + c_2e^{\frac{3x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} \\ &= e^{\frac{3x}{2}}\left(c_1\text{sen}\,\frac{\sqrt{3}x}{2} + c_2\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\end{aligned}$$

$c_1, c_2, \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *A **equação auxiliar** da equação difierencial **homogênea associada** é dada por*

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 0$$

ou seja

$$m_1 = m_2 = 1$$

e, o conjunto fundamental de soluções é

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{m_1 x} \\ &= e^x \\ y_2 &= x y_1 \\ &= x e^x \end{aligned}$$

*Usando o **método da variação de parâmetros**, tem-se que*

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & (1+x)\, e^x \end{vmatrix} \\ &= e^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix},\ f(x) = \frac{e^x}{x^2} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & x e^x \\ \frac{e^x}{x^2} & (1+x)\, e^x \end{vmatrix} \\ &= -\frac{e^{2x}}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x^2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{e^{2x}}{x^2} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} \\ &= \frac{-\frac{e^{2x}}{x}}{e^{2x}} \\ &= -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{W_2}{W} \\ &= \frac{\frac{e^{2x}}{x^2}}{e^{2x}} \\ &= \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} u_1 &= -\ln|x| + c_0 \\ u_2 &= -\frac{1}{x} + c_1 \end{aligned}$$

com $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. *Considerando* $c_0 = c_1 = 0$ *e* $x > 0$, *segue-se que, uma **solução particular** da equação é*

$$\begin{aligned} y_p &= y_1 u_1 + y_2 u_2 \\ &= -e^x \ln x + x e^x \left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= -e^x (\ln x + 1) \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Observe que* $x = 0$ *é um ponto singular regular da equação*

$$x y'' - x^2 y' + \left(x^2 - 2\right) y = 0$$

*Deste modo, considere a seguinte proposta de solução segundo o **método de Frobenius**,*

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

e, substituindo na equação, tem-se

$$xy'' - x^2y' + \left(x^2-2\right)y = 0 \Rightarrow$$

$$x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2} -$$
$$-x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1} + \left(x^2-2\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-1} -$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r+1} +$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^{n+r} = 0 \Rightarrow$$

$$x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n-1} -\right.$$
$$\left.-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^n\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)(n+r)a_{n+1}x^n -$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^n = 0 \Rightarrow$$

$$r(r-1)a_0x^{-1} + r(r+1)a_1 +$$
$$+(r+2)(r+1)a_2x - ra_0x +$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}(n+r+1)(n+r)a_{n+1}x^n -$$
$$-\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^n -$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n - 2a_0 - 2a_1x - \sum_{n=2}^{\infty}2a_nx^n = 0 \Rightarrow$$

$$r(r-1)a_0x^{-1} + r(r+1)a_1 +$$
$$+(r+2)(r+1)a_2x - ra_0x -$$
$$-2a_0 - 2a_1x +$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{(n+r+1)(n+r)a_{n+1} -\right.$$
$$\left.-(n+r-1)a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_n\right\}x^n = 0$$

Logo,

$$\left\{\begin{array}{r} r(r-1)a_0 = 0 \\ r(r+1)a_1 - 2a_0 = 0 \\ (r+2)(r+1)a_2 - ra_0 - 2a_1 = 0 \\ (n+r+1)(n+r)a_{n+1} - \\ -(n+r-1)a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_n = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} r = 0 \text{ ou } r = 1 \\ a_1 = \dfrac{2}{r(r+1)}a_0 \\ a_2 = \dfrac{ra_0 + 2a_1}{(r+2)(r+1)} \\ a_{n+1} = \dfrac{(n+r-1)a_{n-1} - a_{n-2} + 2a_n}{(n+r+1)(n+r)} \end{array}\right.$$

Supondo $a_0 = 1$ e $r = 1$, tem-se

$$a_{n+1} = \frac{na_{n-1} - a_{n-2} + 2a_n}{(n+2)(n+1)}$$

e,

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = \frac{1}{2}$$
$$a_3 = \frac{1}{6}$$
$$a_4 = \frac{1}{24}$$
$$a_5 = \frac{1}{120}$$
$$a_6 = \frac{1}{720}$$
$$\cdots$$

Ou seja

$$\begin{aligned} y_1 &= x^r\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots\right) \\ &= x\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots\right) \\ &= x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^5 + \frac{1}{120}x^6 + \cdots \end{aligned}$$

*é **uma solução** da equação dada.* ■

Exercício 5 *Utilizando a **Transformada de Laplace** para a resolução desta equação, observe que*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{x'' + 4x\right\} &= \mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} 3t\right\} \Leftrightarrow \\ \mathcal{L}\left\{y''\right\} + 4\mathcal{L}\left\{x\right\} &= \mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} 3t\right\} \end{aligned}$$

Considerando

$$X = \mathcal{L}\left\{x\right\},$$

a equação anterior pode ser reescrita como

$$
\begin{aligned}
s^2X - sx(0) - x'(0) + 4X &= \frac{3}{s^2+9} \Rightarrow \\
\left(s^2+4\right) X &= \frac{3}{s^2+9} \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$X = \frac{3}{(s^2+4)\,(s^2+9)}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
x &= \mathcal{L}^{-1}\left\{X\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s^2+4)\,(s^2+9)}\right\}
\end{aligned}
$$

*Usando **frações parciais**, tem-se que*

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{(s^2+4)\,(s^2+9)} &= \frac{3}{5}\frac{1}{(s^2+4)} - \frac{3}{5}\frac{1}{(s^2+9)} \\
&= \frac{3}{10}\frac{2}{(s^2+4)} - \frac{1}{5}\frac{3}{(s^2+9)}
\end{aligned}
$$

Ou seja

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{3}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} - \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} \\
&= \frac{3}{10}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{5}\operatorname{sen} 3t
\end{aligned}
$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma M4

Prof^{o}. Edson

1ª Prova **2º Semestre** **2022**

Data: 14 de Junho de 2023 **Duração: 14:00 - 16:00**

Problema 1 *Resolva o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} (\operatorname{tg} x)\, y' = y \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Problema 2 *Resolva a equação diferencial*

$$y' = (1-y)\cos x$$

Problema 3 *Resolva a equação*

$$(3x^2y - x^2)dx + dy = 0$$

Problema 4 *Resolva a equação*

$$2x^2\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

Problema 5 *Resolva a equação*

$$xy^2y' = x^2 + y^3$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 1ª Prova **2022**
Data: Sexta-feira, 16 de Junho **Turma M4**

Exercício 1 *Observe que a equação diferencial*

$$(\operatorname{tg} x)\, y' = y$$

pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x \frac{dy}{dx} &= y && \Rightarrow \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{\operatorname{tg} x} && \Rightarrow \\ \frac{dy}{y} &= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx \end{aligned}$$

Ou seja, tem-se uma equação de ***variáveis separáveis****, cuja solução é dada por*

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx && \Rightarrow \\ \ln|y| &= \ln|\operatorname{sen} x| + c_0 && \Rightarrow \\ |y| &= e^{\ln|\operatorname{sen} x| + c_0} && \Rightarrow \\ y &= \pm e^{c_0} \operatorname{sen} x && \Rightarrow \\ y &= c_1 \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Onde $c_1 = \pm e^{c_0}$ *e* $c_0 \in \mathbb{R}$.
Sabendo que

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

segue-se que

$$c_1 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c_1 = \frac{\pi}{2}$$

e

$$y(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} x$$

■

Exercício 2 *Reescrevendo a equação dada, chega-se a*

$$y' + (\cos x)\, y = \cos x,$$

ou seja, tem-se uma ***equação diferencial linear*** *com,*

$$p(x) = \cos x$$

$$g(x) = \cos x$$

Desta forma, considere

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int p(x) dx \\ &= \int \cos x dx \\ &= \operatorname{sen} x + c_0, \ c_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tomando $c_0 = 0$*, tem-se*

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{\operatorname{sen} x} \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} q(x) &= \int \mu(x) g(x) dx \\ &= \int e^{\operatorname{sen} x} \cos x \, dx \\ &= e^{\operatorname{sen} x} + c_1, \ c_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{q(x)}{\mu(x)} \\ &= \frac{e^{\operatorname{sen} x} + c_1}{e^{\operatorname{sen} x}} \\ &= 1 + c_1 e^{-\operatorname{sen} x} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Para a resolução da equação*

$$(3x^2 y - x^2) dx + dy = 0$$

Considere

$$M(x,y) = 3x^2 y - x^2$$

$$N(x,y) = 1$$

e observe que

$$N_x = 0$$

$$M_y = 3x^2$$

e

$$\varphi(x) = \frac{M_y - N_x}{N} = 3x^2$$

Assim,

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \int \varphi(x)dx \\ &= \int 3x^2 dx \\ &= x^3 + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{x^3+c_0} \\ &= e^{x^3}e^{c_0} \\ &= c_1 e^{x^3}\end{aligned}$$

onde $c_1 = e^{c_0}$ *e* $c_0 \in \mathbb{R}$. *Tomando* $c_0 = 0$ *e multiplicando a equação dada por* μ, *tem-se*

$$(3x^2y - x^2)e^{x^3}dx + e^{x^3}dy = 0$$

que, agora é ***exata****. Logo, existe uma função* $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = (3x^2y - x^2)e^{x^3} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = e^{x^3} \end{cases}$$

Ou seja,

$$\varphi(x,y) = ye^{x^3} - \frac{1}{3}e^{x^3} + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

e a solução da equação em questão é, portanto

$$\varphi(x,y) = c_3,\ c_3 \in \mathbb{R}$$

Ou seja

$$y = c\, e^{-x^3} + \frac{1}{3},\ c \in \mathbb{R}$$

■

Exercício 4 *Observe que a equação diferencial*

$$2x^2\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

pode ser reescrita como

$$\left(x^2 + y^2\right)dx - 2x^2dy = 0,$$

que é uma ***equação homogênea****. Colocando* x^2 *em evidênvia, tem-se*

$$x^2\left\{\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right]dx - 2dy\right\} = 0 \Rightarrow$$

$$\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right]dx - 2dy = 0$$

Considere

$$u = \frac{y}{x}$$

e observe que

$$y = u\,x$$

e

$$dy = x\,du + u\,dx$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$\left(1 + u^2\right)dx - 2\left(x\,du + u\,dx\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(1 + u^2 - 2u\right)dx - 2x\,du = 0 \Rightarrow$$

$$(u-1)^2\,dx - 2x\,du = 0$$

Tem-se portanto, uma ***equação separável****, donde segue-se que*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{x} &= \frac{2du}{(u-1)^2} && \Rightarrow \\ \int\frac{dx}{x} &= \int\frac{2du}{(u-1)^2} && \Rightarrow \\ \ln|x| &= -\frac{2}{u-1} + c_0 && \Rightarrow \\ \frac{2}{u-1} &= -\ln|x| + c_0 && \Rightarrow \\ \frac{2}{c_0 - \ln|x|} &= u - 1 && \Rightarrow \\ u &= \frac{2}{c_0 - \ln|x|} + 1 && \Rightarrow \\ \frac{y}{x} &= \frac{2}{c_0 - \ln|x|} + 1 && \Rightarrow \\ y &= \frac{2x}{c_0 - \ln|x|} + x\end{aligned}$$

onde $c_0 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Observe que a equação*

$$xy^2y' = x^2 + y^3$$

$$y' = \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x}$$

pode ser reescrita da seguinte maneira

$$y' - \frac{y}{x} = xy^{-2} \Rightarrow$$

$$y^2y' - \frac{1}{x}y^3 = x$$

*Ou seja, tem-se uma **equação de Bernoulli**. Considere a seguinte mudança de variável*

$$u = y^3$$

disto segue-se,

$$u' = 3y^2y'$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$u' - \frac{3}{x}u^3 = 3x,$$

*que é uma **equação linear** com*

$$p(x) = -\frac{3}{x}$$

$$g(x) = 3x$$

Considere portanto,

$$\eta(x) = \int p(x)dx$$

$$= -3\int \frac{dx}{x}$$

$$= -3\ln|x| + c_0, \ c_0 \in \mathbb{R}$$

e

$$\mu(x) = e^{\eta(x)}$$

$$= e^{-3\ln|x|+c_0}$$

$$= \frac{e^{c_0}}{|x|^3}$$

$$= \frac{\pm e^{c_0}}{x^3}$$

$$= \frac{c_1}{x^3}, \ c_1 = \pm e^{c_0}$$

Tomando $c_1 = 1$, segue-se que

$$q(x) = \int \mu(x)g(x)dx$$

$$= \int \frac{3dx}{x^2}$$

$$= -\frac{3}{x} + c_2, \ c_2 \in \mathbb{R}$$

e

$$u(x) = \frac{q(x)}{\mu(x)}$$

$$= \frac{-\frac{3}{x} + c_2}{\frac{1}{x^3}}$$

$$= -3x^2 + c_2x^3$$

Ou seja,

$$y^3 = -3x^2 + c_2x^3 \Rightarrow$$

$$y = \left(-3x^2 + c_2x^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma M4

Prof^{o}. Edson

2ª Prova **2º Semestre** **2022**

Data: 18 de Julho de 2023 **Duração: 14:00 - 16:00**

Problema 1 *Sabendo que a função $y_1 = e^{2x}$ é uma solução da equação*

$$\left(x^2 - 1\right) y'' - 2xy' + 2y = 0$$

Encontre outra solução desta ***edo****, que seja linearmente independente de y_1.*

Problema 2 *Resolva a equação*

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$$

Problema 3 *Encontre uma* ***solução particular*** *para a equação*

$$y'' + 3y' - 10y = x\, e^x + 2x$$

Problema 4 *Resolva a equação*

$$x^2y'' - xy' + y = 0$$

Problema 5 *Encontre uma* ***solução particular*** *para a equação*

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x},\ x > 0$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito 2ª Prova **2022**
Data: Sexta-feira, 4 de Agosto **Turma M4**

Exercício 1 *Observe que a equação*

$$(x^2-1)y''-2xy'+2y=0$$

pode ser reescrita em sua ***forma padrão*** *da seguinte forma,*

$$y''-\frac{2x}{x^2-1}y'+\frac{2}{x^2-1}y=0$$

onde

$$P(x)=-\frac{2x}{x^2-1}$$

Deseja-se encontrar uma outra solução desta equação sabendo que

$$y_1=x^2+1$$

é uma solução. Usando o método da ***redução de ordem****, considere*

$$\begin{aligned}\eta(x)&=\int -P(x)dx\\&=\int\frac{2x}{x^2-1}dx\\&=\ln\left|x^2-1\right|+c_0\end{aligned}$$

com $c_0\in\mathbb{R}$. *Disto segue-se que*

$$\begin{aligned}\mu(x)&=e^{\mu(x)}\\&=e^{\ln\left|x^2-1\right|+c_0}\\&=\pm e^{c_0}\left(x^2-1\right)\\&=c_1\left(x^2-1\right)\end{aligned}$$

onde $c_1=\pm e^{c_0}$. *Tomando* $c_1=1$, *tem-se,*

$$\begin{aligned}u(x)&=\int\frac{\mu(x)}{y_1^2}dx\\&=\int\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx\\&=-\frac{x}{x^2+1}+c_2,\ c_2\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Tomando $c_2=0$, *segue-se que,*

$$\begin{aligned}y_2(x)&=y_1(x)u(x)\\&=\left(x^2+1\right)\left(-\frac{x}{x^2+1}\right)\\&=-x\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *A* ***equação auxiliar*** *da* ***edo*** *em questão é dada por*

$$m^3-3m^2+4m-2=0,$$

Observe que

$$m_1=1$$

é uma solução desta equação e

$$m^3-3m^2+4m-2=(m-1)\left(m^2-2m+2\right)$$

Ou seja, as outras solução desta equação são a raízes da equação

$$m^2-2m+2=0$$

que são

$$m_2=1+\mathbf{i}$$

$$m_3=1-\mathbf{i}$$

Disto segue-se que

$$\begin{aligned}\alpha&=1\\\beta&=1\end{aligned}$$

Assim, o ***conjunto fundamental de soluções*** *da equação diferencial em questão é*

$$\begin{aligned}y_1&=e^{m_1x}\\&=e^x\\y_2&=e^{\alpha x}\text{sen }(\beta x)\\&=e^x\text{sen }x\\y_3&=e^{\alpha x}\cos\,(\beta x)\\&=e^x\cos x\end{aligned}$$

*Logo, a **solução geral** da equação é*

$$\begin{aligned} y &= c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 \\ &= c_1e^x + c_2e^x \operatorname{sen} x + c_3e^x \cos x \\ &= e^x\left(c_1 + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 \cos x\right) \end{aligned}$$

com c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Deseja-se encontrar uma **solução particular*** y_p *da equação diferencial*

$$y'' + 3y' - 10y = xe^x + 2x$$

Considere

$$y_p = (Ax + B)e^x + Cx + D$$

e observe que

$$\begin{aligned} y' &= (Ax + A + B)e^x + C \\ y'' &= (Ax + 2A + B)e^x \end{aligned}$$

Substituindo na equação dada, tem-se

$$y'' + 3y' - 10y = xe^x + 2x \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &(Ax + 2A + B)e^x + \\ &+3\left[(Ax + A + B)e^x + C\right] - \\ &-10\left[(Ax + B)e^x + Cx + D\right] = xe^x + 2x \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-6Ax + 5A - 6B)e^x - \\ &\quad -10Cx + 3C - 10D = xe^x + 2x \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} A = -\dfrac{1}{6} \\ B = -\dfrac{5}{36} \\ C = -\dfrac{1}{5} \\ D = -\dfrac{3}{50} \end{cases}$$

*e, portanto a **solução particular** é*

$$y_p = \left(-\frac{1}{6}x - \frac{5}{36}\right)e^x - \frac{1}{5}x - \frac{3}{50}$$

■

Exercício 4 *Sendo esta um **equação de Euler**, segue-se ue sua **equação auxiliar** é dada por*

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 0$$

$$m_1 = m_2 = 1$$

*e, o **conjunto fundamental** de soluções é*

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{m_1} \\ &= x \\ y_2 &= x^{m_1}\ln x \\ &= x\ln x \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_g &= c_1y_1 + c_2y_2 \\ &= c_1x + c_2x\ln x \\ &= (c_1 + c_2\ln x)\,x \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Observe que **equação homogênia associada** é dada por*

$$\begin{aligned} y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0 \Leftrightarrow \\ x^2y'' - xy' + y = 0 \end{aligned}$$

cujas soluções foram encontradas no problema anterior e são

$$\begin{aligned} y_1 &= x \\ y_2 &= x\ln x \end{aligned}$$

*e a **solução geral** é*

$$\begin{aligned} y_c &= c_1y_1 + c_2y_2 \\ &= (c_1 + c_2\ln x)\,x \end{aligned}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

*Usando o **método da variação de parâmetros**, tem-se que*

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x & x\ln x \\ 1 & \ln x + 1 \end{vmatrix} \\ &= x \end{aligned}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, \; f = \frac{1}{x}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & x \ln x \\ \frac{1}{x} & \ln x + 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\ln x$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{1}{x} \end{vmatrix}$$

$$= 1$$

e,

$$u_1' = \frac{W_1}{W}$$

$$= \frac{-\ln x}{x}$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W}$$

$$= \frac{1}{x}$$

Ou seja

$$u_1 = -\frac{\ln^2 x}{2} + c_3$$

$$u_2 = \ln x + c_4$$

com $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. Considerando $c_3 = c_4 = 0$ e $x > 0$, segue-se que, uma ***solução particular*** *da equação é*

$$y_p = y_1 u_1 + y_2 u_2$$

$$= \frac{1}{2} x \ln^2 x$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma M4

Prof^{o}. Edson

3ª Prova **2º Semestre** **2022**

Data: 15 de Agosto de 2023 **Duração: 14:00 - 16:00**

Problema 1 *Determine o* ***intervalo de convergência*** *da série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{(n+3)}$$

Problema 2 *Encontre a* ***solução geral*** *da equação*

$$y'' - y' + xy = 0$$

Problema 3 *Encolntre* ***uma solução*** *da equação*

$$xy'' - x^2 y' + (x^2 - 2)y = 0$$

Problema 4 *Calcule*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s^2+s+1}{(s^2+4)(s^2-9)} \right\}$$

Problema 5 *Resolva o* ***problema de valor inicial***

$$\begin{cases} y'' - y' - 12y = x \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = \ \ 0 \end{cases}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito 3ª Prova **2022**
Data: Quarta-feira, 16 de Agosto **Turma M4**

Exercício 1 *Observe que o termo geral desta série é dado por*

$$a_n = \frac{2^n(x-3)^n}{n+3}$$

Assim, segue-se que

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}(x-3)^{n+1}}{n+4}$$

e

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{2^{n+1}(x-3)^{n+1}}{n+4}\frac{n+3}{2^n(x-3)^n}\right| \\
&= \left|2(x-3)\frac{n+3}{n+4}\right| \\
&= |2|\left|\frac{n+3}{n+4}\right||x-3| \\
&= 2\left(\frac{n+3}{n+4}\right)|x-3|
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{n+3}{n+4}\right)|x-3| \\
&= 2|x-3|\lim_{n\to+\infty}\frac{n+3}{n+4} \\
&= 2|x-3|
\end{aligned}$$

*Usando o **teste da razão**, a série dada será absolutamente convergente quando*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

Ou seja, quando

$$\begin{aligned}
2|x-3| < 1 \quad &\Rightarrow \\
|x-3| < \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \\
-\frac{1}{2} < x-3 < \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \\
3-\frac{1}{2} < x < 3+\frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \\
\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Logo, o intervalo de convergência é

$$I = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right),$$

havendo ainda a possibilidade de convergência nos extremos deste intervalo (dispensado de fazer). ■

Exercício 2 *Observe que $x = 0$ é um ponto ordinário para a **edo***

$$y'' - y' + xy = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned}
y'' - y' + xy = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + & \\
+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - & \\
-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - & \\
-a_1 - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0 \quad &\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$2a_2 - a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + a_{n-1}\right]x^n = 0$$

Portanto,

$$\begin{cases} 2a_2 - a_1 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{a_1}{2} \\ a_{n+2} = \dfrac{(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \end{cases} \Rightarrow$$

Tomando $a_0 = 1$ *e* $a_1 = 0$, *tem-se*

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = 0$$

$$a_3 = -\frac{1}{6}$$

$$a_4 = -\frac{1}{24}$$

$$a_5 = -\frac{1}{120}$$

$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_1(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 + \cdots$$

Tomando agora, $a_0 = 0$ *e* $a_1 = 1$, *tem-se*

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{6}$$

$$a_4 = -\frac{1}{24}$$

$$a_5 = -\frac{1}{30}$$

$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_2(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots$$

$$= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots$$

E a solução geral da ***edo*** *é dada por*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Observe que* $x = 0$ *é um* ***ponto singular regular*** *da equação*

$$xy'' - x^2 y' + (x^2 - 2)y = 0$$

Deste modo, considere a seguinte proposta de solução segundo o ***Método de Frobenius***,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned}
xy'' - x^2 y' + (x^2 - 2)y = 0 \quad &\Rightarrow \\
x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} - \\
-x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + (x^2-2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} - \\
-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r+1} + \\
+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+r} = 0 \quad &\Rightarrow \\
x^r \Bigg[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} - \\
-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n\Bigg] = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)(n+r)a_{n+1}x^n - \\
-\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
r(r-1)a_0 x^{-1} + r(r+1)a_1 + \\
+(r+2)(r+1)a_2 x - r a_0 x - 2a_0 - 2a_1 x + \\
\sum_{n=-2}^{\infty}(n+r+1)(n+r)a_{n+1}x^n - \\
-\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^n + \\
+\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 2a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$r(r-1)a_0x^{-1} + r(r+1)a_1 - 2a_0 +$$
$$+\left[(r+2)(r+1)a_2 - ra_0 - 2a_1\right]x +$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\{(n+r+1)(n+r)a_{n+1} -$$
$$-(n+r-1)a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_n\}\, x^n = 0$$

Logo,

$$\begin{cases} r(r-1)a_0 = 0 \\ r(r+1)a_1 - 2a_0 = 0 \\ (r+2)(r+1)a_2 - ra_0 - 2a_1 = 0 \\ (n+r+1)(n+r)a_{n+1} - \\ -(n+r-1)a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_n = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r = 0 \, ou \, r = 1 \\ a_1 = \dfrac{2}{r(r+1)}a_0 \\ a_2 = \dfrac{ra_0 + 2a_1}{(r+2)(r+1)} \\ a_{n+1} = \dfrac{(n+r-1)a_{n-1} - a_{n-2} + 2a_n}{(n+r+1)(n+r)} \end{cases}$$

Supondo $a_0 = 1$ e $r = 1$, tem-se

$$a_{n+1} = \frac{na_{n-1} - a_{n-2} + 2a_n}{(n+2)(n+1)}$$

e,

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = \frac{1}{2}$$
$$a_3 = \frac{1}{6}$$
$$a_4 = \frac{1}{24}$$
$$a_5 = \frac{1}{120}$$
$$a_6 = \frac{1}{720}$$
$$\cdots$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_1 &= x^r\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots\right) \\ &= x\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots\right) \\ &= x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \\ &= x\,e^x \end{aligned}$$

é uma solução da equação dada. ■

Exercício 4 *Usando **frações parciais**, observe inicialmente que*

$$\frac{s^2+s+1}{(s^2+4)(s^2-9)} = \frac{3}{13}\frac{1}{s^2+4} - \frac{1}{13}\frac{s}{s^2+4} -$$
$$-\frac{7}{78}\frac{1}{s+3} + \frac{1}{6}\frac{1}{s-3}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+s+1}{(s^2+4)(s^2-9)}\right\} &= \frac{3}{13}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} - \\ &- \frac{1}{13}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \\ &- \frac{7}{78}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + \\ &+ \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} \\ &= \frac{3}{26}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{13}\cos 2t \\ &- \frac{7}{78}e^{-3t} + \frac{1}{6}e^{3t} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Utilizando a **Transformada de Laplace** para a resolução desta equação, observe que*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'' - y' - 12y\} &= \mathcal{L}\{x\} \quad \Leftrightarrow \\ \mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 12\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{x\} \end{aligned}$$

Considerando

$$Y = \mathcal{L}\{y\},$$

a equação anterior pode ser reescrita como

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) - [sY - y(0)] - 12Y = \frac{1}{s^2} \Rightarrow$$

$$\left(s^2 - s - 12\right) Y + s - 1 = \frac{1}{s^2} \Rightarrow$$

$$Y = \frac{-s^3 + s^2 + 1}{s^2\left(s^2 - s - 12\right)}$$

Logo,

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-s^3 + s^2 + 1}{s^2\left(s^2 - s - 12\right)}\right\}$$

*Usando **frações parciais**, tem-se que*

$$\frac{-s^3 + s^2 + 1}{s^2\left(s^2 - s - 12\right)} = \frac{1}{144s} - \frac{47}{112\left(s - 4\right)} -$$

$$- \frac{37}{63\left(s + 3\right)} - \frac{1}{12s^2}$$

Ou seja

$$y = \frac{1}{144}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{47}{112}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - 4}\right\} -$$

$$- \frac{37}{63}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 3}\right\} - \frac{1}{12}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{144} - \frac{47}{112}e^{4x} - \frac{37}{63}e^{-3x} - \frac{1}{12}x$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma M4

Profº. Edson

Prova Final **2º Semestre** **2022**

Data: 17 de Agosto de 2023 **Duração: 14:00 - 16:00**

Problema 1 *Encontre a **solução geral** da equação*

$$\left(ye^{-x}+1\right)dx + xe^{-x}dy = 0$$

Problema 2 *Encontre uma **solução particular** da equação*

$$y'' + 5y' + 6y = x^2e^{-x}$$

Problema 3 *Encolntre a **solução geral** da equação*

$$(1+x^2)y'' + xy' + xy = 0$$

Problema 4 *Calcule*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^3+2s}\right\}$$

Problema 5 *Resolva o **problema de valor inicial***

$$\begin{cases} x'' + 4x = \operatorname{sen} 3t \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito Prova Final **2022**
Data: Quinta-feira, 17 de Agosto **Turma M4**

Exercício 1 *Considere a diferencial*

$$\left(ye^{-x}+1\right)dx+xe^{-x}dy=0 \tag{1}$$

Tem-se que

$$M(x,y)=ye^{-x}+1$$
$$N(x,y)=xe^{-x}$$

e observe que

$$M_y=e^{-x}$$
$$N_x=(1-x)\,e^{-x}$$

e, além disso,

$$\frac{M_y-N_x}{N}=1$$

*O que significa dizer que a equação dada pode se tornar **exata** e seu **fator integrante** é dado por*

$$\begin{aligned}\mu(x)&=e^{\int\left(\frac{M_y-N_x}{N}\right)dx}\\&=e^{\int dx}\\&=e^{x+c_0}\\&=c_1e^x\end{aligned}$$

com $c_1=e^{c_0}$ e $c_0\in\mathbb{R}$. Escolhendo $c_1=1$ e multiplicando a equação (1) por μ, tem-se

$$\left(y+e^x\right)dx+xdy=0$$

*que é **exata**. Para encontrar as soluções desta equação é necessário resolver o seguinte sistema*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=y+e^x\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial y}=x\end{cases}$$

Integrando em relação à y a segunda equação do sistema, obtêm-se

$$f(x,y)=xy+k(x)$$

Donde segue-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y+k'(x)$$

Comparando este resultado com a primeira equação do sistema, tem-se que

$$k'(x)=e^x\Leftrightarrow k(x)=e^x+c_1$$

com $c_1\in\mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned}f(x,y)&=xy+k(x)\\&=xy+e^x+c_1\end{aligned}$$

*e a solução da **edo** em questão é dada por*

$$f(x,y)=c_2,\ c_2\in\mathbb{R}$$

Ou seja,

$$xy+e^x+c_1=c_2$$
$$xy+e^x=c$$
$$y=\frac{c-e^x}{x}$$

Com $c\in\mathbb{R}$. ■

Exercício 2 *Deseja-se encontrar uma **solução particular** y_p da equação diferencial*

$$y''+5y'+6y=x^2e^{-x}$$

Considere

$$y_p=\left(Ax^2+Bx+C\right)e^{-x}$$

e observe que

$$\begin{aligned}y'&=\left[-Ax^2+(2A-B)\,x+B-C\right]e^{-x}\\y''&=\left[Ax^2-(4A-B)\,x+2A-2B+C\right]e^{-x}\end{aligned}$$

Substituindo na equação dada, tem-se

$$\begin{aligned}y''+5y'+6y&=x^2e^{-x}\quad\Leftrightarrow\\\left\{2Ax^2+(6A+2B)\,x+2A+\right.&\\\left.+3B+2C\right\}e^{-x}&=x^2e^{-x}\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} A = & \dfrac{1}{2} \\ B = & -\dfrac{3}{2} \\ C = & \dfrac{7}{4} \end{cases}$$

*e, portanto a **solução particular** é*

$$y_p = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right)e^{-x}$$

□

(Outro Modo:)

*A **equação auxiliar** da equação diferencial **homogênea associada** é dada por*

$$m^2 + 5m + 6 = 0$$

ou seja

$$m_1 = -2$$
$$m_2 = -3$$

e, o conjunto fundamental de soluções é

$$y_1 = e^{m_1 x} = e^{-2x}$$

$$y_2 = e^{m_2 x} = e^{-3x}$$

*Usando o **método da variação de parâmetros**, tem-se que*

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-3x} \\ -2e^{-2x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -e^{-5x}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, f = x^2e^{-x}$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & e^{-3x} \\ x^2e^{-x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -x^2e^{-4x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & x^2e^{-x} \end{vmatrix} = x^2e^{-3x}$$

e,

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{-x^2e^{-4x}}{-e^{-5x}} = x^2e^x$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{x^2e^{-3x}}{-e^{-5x}} = -x^2e^{2x}$$

Ou seja

$$u_1 = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + c_0$$

$$u_2 = -\frac{1}{4}e^{2x}\left(2x^2 - 2x + 1\right) + c_1$$

*com $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. Considerando $c_0 = c_1 = 0$, segue-se que, uma **solução particular** da equação é*

$$y_p = y_1u_1 + y_2u_2 = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right)e^{-x}$$

■

Exercício 3 *Observe que $x = 0$ é um ponto ordinário para a **edo***

$$(1 + x^2)y'' + xy' + xy = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned}
(1+x^2)y'' + xy' + xy = 0 \quad &\Rightarrow \\
(1+x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + & \\
+x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + & \\
+\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + & \\
+\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0 \quad &\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2a_2 + (6a_3 + a_1 + a_0)\, x + & \\
+\sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + & \\
+\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
2a_2 + (6a_3 + a_1 + a_0)\, x + & \\
\sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + n^2 a_n + a_{n-1}\right] x^n = 0 &
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} 2a_2 = 0 \\ 6a_3 + a_1 + a_0 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} + n^2 a_n + a_{n-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ a_3 = \dfrac{-a_1 - a_0}{6} \\ a_{n+2} = \dfrac{-n^2 a_n - a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \end{cases} \Rightarrow$$

Tomando $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, tem-se

$$a_2 = 0$$
$$a_3 = -\frac{1}{6}$$
$$a_4 = 0$$
$$a_5 = \frac{3}{40}$$
$$a_6 = \frac{1}{180}$$
$$\cdots$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{1}{180}x^6 \cdots \end{aligned}$$

Tomando agora, $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, tem-se

$$a_2 = 0$$
$$a_3 = -\frac{1}{6}$$
$$a_4 = -\frac{1}{12}$$
$$a_5 = \frac{3}{40}$$
$$a_6 = \frac{1}{20}$$
$$\cdots$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{1}{20}x^6 \cdots \end{aligned}$$

*E a solução geral da **edo** é dada por*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 4 *Observe que*

$$\begin{aligned} \frac{s+1}{s^3+2s} &= \frac{s+1}{s\,(s^2+2)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+2} + \frac{1}{s^2+2} \end{aligned}$$

Logo, aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ e usando a sua linearidade, obtem-se

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^3+2s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+2} + \frac{1}{s^2+2}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\right\} +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right\}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t$$

■

Exercício 5 *Utilizando a **Transformada de Laplace** para a resolução desta equação, observe que*

$$\mathcal{L}\{x'' + 4x\} = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} 3t\} \quad \Leftrightarrow$$
$$\mathcal{L}\{x''\} + 4\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} 3t\}$$

Considerando

$$X = \mathcal{L}\{x\},$$

a equação anterior pode ser reescrita como

$$s^2X - s\,x(0) - x'(0) + 4X = \frac{3}{s^2+9} \quad \Rightarrow$$
$$\left(s^2+4\right)X = \frac{3}{s^2+9} \quad \Rightarrow$$
$$X = \frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}$$

Logo,

$$x = \mathcal{L}^{-1}\{X\}$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}\right\}$$

Usando frações paciais, tem-se que

$$\frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{3}{5}\frac{1}{(s^2+4)} - \frac{3}{5}\frac{1}{(s^2+9)}$$
$$= \frac{3}{10}\frac{2}{(s^2+4)} - \frac{1}{5}\frac{3}{(s^2+9)}$$

Ou seja,

$$x = \frac{3}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} - \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}$$
$$= \frac{3}{10}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{5}\operatorname{sen} 3t$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma C4

Profº. Edson

1ª Prova **1º Semestre** **2023**

Data: 10 de Outubro de 2023 **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Resolva o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} xy' + y = \cos x, \; x > 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \end{cases}$$

Problema 2 *Resolva a equação diferencial*

$$3x^2\left(1 + \ln y\right) = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)\frac{dy}{dx}$$

Problema 3 *Resolva a equação*

$$(3x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0$$

Problema 4 *Resolva a equação*

$$xy\,dy = \left(y^2 + x\right)dx$$

Problema 5 *Resolva a equação*

$$y' = 2\left(\frac{y}{x+y}\right)^2$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1º Semestre

Gabarito 1ª Prova **2023**
Data: Quarta-feira, 11 de Outubro de 2023 **Turma C4**

Exercício 1 *Observe que a equação*

$$xy' + y = \cos x$$

pode ser reescrita da seguinte forma

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\cos x}{x},$$

o que a caracteriza como sendo uma ***equação diferencial linear****, em que*

$$p(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = \frac{\cos x}{x}$$

Desta forma, considere

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \int p(x)dx \\ &= \int \frac{1}{x}dx \\ &= \ln|x| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Tomando $c_0 = 0$, e observando que $x > 0$, tem-se

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{\ln x} \\ &= x\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}q(x) &= \int \mu(x)g(x)dx \\ &= \int x\frac{\cos x}{x}\,dx \\ &= \operatorname{sen} x + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{q(x)}{\mu(x)} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x + c_1}{x}\end{aligned}$$

Sabendo que

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi},$$

segue-se que

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + c_1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi} \Rightarrow c_1 = 1$$

e

$$y(x) = \frac{\operatorname{sen} x + 1}{x}$$

■

Exercício 2 *Perceba inicialmente que a equação dada,*

$$3x^2(1 + \ln y) = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)\frac{dy}{dx},$$

pode ser reescrita como

$$3x^2(1 + \ln y)\,dx + \left(\frac{x^3}{y} - 2y\right)dy = 0$$

Considerando

$$\begin{aligned}M(x,y) &= 3x^2(1 + \ln y) \\ N(x,y) &= \frac{x^3}{y} - 2y,\end{aligned}$$

tem-se,

$$M_y(x,y) = \frac{3x^2}{y}$$

$$N_x(x,y) = \frac{3x^2}{y}$$

Ou seja,

$$M_y(x,y) = N_x(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

o que permite afirmar que a equação em questão é ***exata*** *e, portanto existe uma função $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = M(x,y) \\[2mm] \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = N(x,y)\end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 3x^2(1 + \ln y) \\[2mm] \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{x^3}{y} - 2y\end{cases}$$

Ou seja,

$$\varphi(x,y) = x^3(\ln y + 1) - y^2 + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$$

e a solução da equação em questão é

$$\varphi(x,y) = c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

Ou seja

$$x^3(\ln y + 1) - y^2 = c,\ c \in \mathbb{R}$$

■

Exercício 3 *Para a resolução da equação*

$$\left(3x^2 + y\right) dx + \left(x^2 y - x\right) dy = 0$$

Considere

$$M(x,y) = 3x^2 + y$$

$$N(x,y) = x^2 y - x$$

e observe que

$$N_x = 2xy - 1$$

$$M_y = 1$$

e

$$\varphi(x) = \frac{M_y - N_x}{N} = -\frac{2}{x}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \int \varphi(x) dx \\ &= \int -\frac{2}{x} dx \\ &= -2\ln|x| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{\ln|x|^{-2} + c_0} \\ &= \frac{e^{c_0}}{x^2} \\ &= \frac{c_1}{x^2}\end{aligned}$$

onde $c_1 = e^{c_0}$ e $c_0 \in \mathbb{R}$. Tomando $c_0 = 0$ e multiplicando a equação dada por μ, tem-se

$$\left(3 + \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(y - \frac{1}{x}\right) dy = 0$$

que, agora é ***exata****. Logo, existe uma função $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 3 + \dfrac{y}{x^2} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = y - \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Ou seja,

$$\varphi(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} + 3x + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

e a solução da equação em questão é, portanto

$$\varphi(x,y) = c_3,\ c_3 \in \mathbb{R}$$

Ou seja

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} + 3x = c,\ c \in \mathbb{R}$$

■

Exercício 4 *Observe que a equação diferencial*

$$xy\, dy = \left(y^2 + x\right) dx$$

pode ser reescrita como

$$y' - \frac{1}{x} y = y^{-1} \Leftrightarrow yy' - \frac{1}{x} y^2 = 1$$

que é uma ***equação de Bernoulli****.Considere a seguinte mudança de variável*

$$u = y^2$$

disto segue-se,

$$u' = 2yy'$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$u' - \frac{2}{x} u = 2,$$

que é uma ***equação linear*** *com*

$$p(x) = -\frac{2}{x}$$

$$g(x) = 2$$

Considere portanto,

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \int p(x) dx \\ &= -2 \int \frac{dx}{x} \\ &= -2\ln|x| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

e

$$\mu(x) = e^{\eta(x)} = e^{-2\ln|x|+c_0} = \frac{e^{c_0}}{x^2} = \frac{c_1}{x^2},\ c_1 = e^{c_0}$$

Tomando $c_1 = 1$, segue-se que

$$q(x) = \int \mu(x)g(x)dx = \int \frac{2dx}{x^2} = -\frac{2}{x} + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

e

$$u(x) = \frac{q(x)}{\mu(x)} = \frac{-\frac{2}{x} + c_2}{\frac{1}{x^2}} = c_2x^2 - 2x$$

Ou seja,

$$y^2 = c_2x^2 - 2x \Rightarrow$$

$$y = \sqrt{c_2x^2 - 2x}$$

■

Exercício 5 *Observe que a equação*

$$y' = 2\left(\frac{y}{x+y}\right)^2$$

pode ser reescrita da seguinte maneira

$$2y^2dx - (x+y)^2\,dy = 0 \Rightarrow$$

$$x^2\left[2\frac{y^2}{x^2}dx - \frac{(x+y)^2}{x^2}dy\right] = 0 \Rightarrow$$

$$2\left(\frac{y}{x}\right)^2 dx - \left(1 + \frac{y}{x}\right)^2 dy = 0$$

Considere a seguinte mudança de variável

$$u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux$$

disto segue-se,

$$dy = x\,du + u\,dx$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$-u\left(1+u^2\right)\,dx = (1+u)^2\,x\,du \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{(1+u)^2}{-u\,(1+u^2)}du \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = \left(-\frac{1}{u} - \frac{2}{1+u^2}\right)du$$

Ou seja

$$\ln|x| = -\ln\left|\frac{y}{x}\right| - 2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) + c_0 \Rightarrow$$

$$\ln|y| + 2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) = c_1$$

onde $c_1 = -c_0$ e $c_0 \in \mathbb{R}$. ■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma C4

Prof^{o}. Edson

2ª Prova | **1º Semestre** | **2023**

Data: 14 de Novembro de 2023 | **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Sabendo que a função* $y_1 = \operatorname{sen}\left(x^2\right)$ *é uma solução da equação*

$$xy'' - y' + 4x^3y = 0,\ x > 0$$

Encontre ***outra solução*** *desta* ***edo****, que seja linearmente independente de* y_1.

Problema 2 *Resolva a equação*

$$y''' - 8y'' + 17y' - 30y = 0$$

Problema 3 *Resolva o seguinte* ***problema de valor inicial***

$$\begin{cases} 4x^2y'' + 8xy' + 17y = 0 \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = -3 \end{cases}$$

Problema 4 *Encontre uma* ***solução particular*** *para a equação*

$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}\cos 2x$$

Problema 5 *Encontre uma* ***solução particular*** *para a equação*

$$y'' + 4y' + 4y = x^{-2}e^{-2x},\ x > 0$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 2ª Prova **2023**
Data: Sábado, 25 de Novembro **Turma C4**

Exercício 1 *Observe que a equação*

$$xy'' - y' + 4x^3y = 0,$$

pode ser reescrita em sua ***forma padrão*** *da seguinte forma,*

$$y'' - \frac{1}{x}y' + 4x^2y = 0$$

onde

$$P(x) = -\frac{1}{x}$$

Deseja-se encontrar uma outra solução desta equação sabendo que

$$y_1 = \text{sen}\left(x^2\right)$$

é uma solução. Usando da ***redução de ordem****, considere*

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \int -P(x)dx\\ &= \int \frac{1}{x}dx\\ &= \ln|x| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Tomando $c_0 = 0$ e sabendo que $x > 0$, segue-se que

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\eta(x)}\\ &= e^{\ln x}\\ &= x\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}u(x) &= \int \frac{\mu(x)}{y_1^2}dx\\ &= \int \frac{x}{\left[\text{sen}\left(x^2\right)\right]^2}dx\\ &= -\frac{1}{2}\text{cotg}\left(x^2\right) + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Tomando $c_1 = 0$, tem-se,

$$\begin{aligned}y_2(x) &= u(x)y_1(x)\\ &= -\frac{1}{2}\text{cotg}\left(x^2\right)\text{sen}\left(x^2\right)\\ &= -\frac{1}{2}\cos\left(x^2\right)\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *A* ***equação auxiliar*** *da* ***edo*** *em questão é dada por*

$$m^3 - 8m^2 + 17m - 30 = 0,$$

Perceba que

$$m_1 = 6$$

é uma solução desta equação e

$$m^3 - 8m^2 + 17m - 30 = (m-6)\left(m^2 - 2m + 5\right)$$

Ou seja, as outras soluções desta equação são a raízes da equação

$$m^2 - 2m + 5 = 0$$

que são

$$m_2 = 1 + 2\mathbf{i}$$

$$m_3 = 1 - 2\mathbf{i}$$

Disto segue-se que

$$\begin{aligned}\alpha &= 1\\ \beta &= 2\end{aligned}$$

Assim, o ***conjunto fundamental de soluções*** *da equação diferencial em questão é*

$$\begin{aligned}y_1 &= e^{m_1x}\\ &= e^{6x}\\ y_2 &= e^{\alpha x}\text{sen}\ (\beta x)\\ &= e^{x}\text{sen}\,2x\\ y_3 &= e^{\alpha x}\cos\ (\beta x)\\ &= e^{x}\cos 2x\end{aligned}$$

Logo, a ***solução geral*** *da equação é*

$$\begin{aligned}y &= c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3\\ &= c_1e^{6x} + c_2e^{x}\text{sen}\,2x + c_3e^{x}\cos 2x\end{aligned}$$

com c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Nesta questão tem-se uma equação de* ***Cauchy-Euler*** *cuja equação auxiliar é dada por*

$$4m^2 + (8-4)m + 17 = 0,$$

cujas soluções são

$$m_1 = -\frac{1}{2} + 2\mathbf{i}$$

$$m_2 = -\frac{1}{2} - 2\mathbf{i}$$

Disto segue-se que

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\beta = 2$$

Assim, o ***conjunto fundamental de soluções*** *da equação diferencial em questão é*

$$\begin{aligned} y_1 &= x^\alpha \cos(\beta \ln x) \\ &= x^{-\frac{1}{2}} \cos(2\ln x) \\ &= \frac{\cos(2\ln x)}{\sqrt{x}} \\ y_2 &= x^\alpha \text{sen}(\beta \ln x) \\ &= x^{-\frac{1}{2}} \text{sen}(2\ln x) \\ &= \frac{\text{sen}(2\ln x)}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Logo, a ***solução geral*** *da equação é*

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 \frac{\cos(2\ln x)}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\text{sen}(2\ln x)}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left[c_1 \cos(2\ln x) + c_2 \text{sen}(2\ln x) \right] \end{aligned}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$*. Como, o* ***PVI*** *informa que* $y(1) = 2$ *e* $y'(1) = -3$*, segue-se que*

$$c_1 = 2$$

$$c_2 = -1$$

Portanto,

$$y = \frac{2\cos(2\ln x) - \text{sen}(2\ln x)}{\sqrt{x}}$$

■

Exercício 4 *Deseja-se encontrar uma* ***solução particular*** y_p *da equação diferencial*

$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}\cos 2x$$

Observe inicialmente que

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-x}\cos 2x \\ y_2 &= e^{-x}\text{sen}\, 2x \end{aligned}$$

são soluções linearmente independentes da equação homogênea associada da edo dada. Desta forma, para utilisar o ***método dos coeficientes a determinar****, é coerente a seguinte proposta de solução particular*

$$\begin{aligned} y_p &= x\left[Ae^{-x}\cos 2x + Be^{-x}\text{sen}\, 2x\right] \\ &= x\left(Ay_1 + By_2\right) \end{aligned}$$

e observe que

$$\begin{aligned} y' &= Ay_1 + By_2 + x\left(Ay_1' + By_2'\right) \\ y'' &= 2Ay_1' + 2By_2' + x\left(Ay_1'' + By_2''\right) \end{aligned}$$

Substituindo-se na equação dada, tem-se

$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}\cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} 2Ay_1' + 2By_2' + x\left(Ay_1'' + By_2''\right) + \\ +2Ay_1 + 2By_2 + 2x\left(Ay_1' + By_2'\right) + \\ +5x\left(Ay_1 + By_2\right) = 4e^{-x}\cos 2x \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xA\left(y_1'' + 2y_1' + 5y_1\right) + \\ +xB\left(y_2'' + 2y_2' + 5y_2\right) + \\ 2Ay_1' + 2By_2' + 2Ay_1 + 2By_2 = 4e^{-x}\cos 2x \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2A\left(-e^{-x}\cos 2x - 2e^{-x}\text{sen}\, 2x\right) + \\ +2B\left(-e^{-x}\text{sen}\, 2x + 2e^{-x}\cos 2x\right) + \\ +2Ae^{-x}\cos 2x + 2Be^{-x}\text{sen}\, 2x = 4e^{-x}\cos 2x \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$4Be^{-x}\cos 2x - 4Ae^{-x}\text{sen}\, 2x = 4e^{-x}\cos 2x$$

Ou seja,

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

e, portanto uma ***solução particular*** *é*

$$y_p = xe^{-x}\text{sen}\, 2x$$

□

(Outro modo:) *Sabendo que as soluções fundamentais da equação homogênea associada são*

$$y_1 = e^{-x}\cos 2x$$

$$y_2 = e^{-x}\operatorname{sen} 2x$$

e, usando o ***método da variação dos parâmetros****, segue-se que*

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$= 2e^{-2x}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, f(x) = 4e^{-x}\cos 2x$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & e^{-x}\operatorname{sen} 2x \\ 4e^{-x}\cos 2x & \cdots \end{vmatrix}$$

$$= -4e^{-2x}\operatorname{sen} 2x \cos 2x$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^{-x}\cos 2x & 0 \\ \cdots & 4e^{-x}\cos 2x \end{vmatrix}$$

$$= 4e^{-2x}\cos^2 2x$$

e,

$$u_1' = \frac{W_1}{W}$$

$$= \frac{-4e^{-2x}\operatorname{sen} 2x\cos 2x}{2e^{-2x}}$$

$$= -2\operatorname{sen} 2x \cos 2x$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W}$$

$$= \frac{4e^{-2x}\cos^2 2x}{2e^{-2x}}$$

$$= 2\cos^2 2x$$

Ou seja

$$u_1 = -\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{2} + c_1$$

$$u_2 = x + \frac{\operatorname{sen} 2x \cos 2x}{2} + c_2$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Considerando* $c_1 = c_2 = 0$ *, segue-se que, uma* ***solução particular*** *da equação é*

$$y_p = y_1u_1 + y_2u_2$$

$$= xe^{-x}\operatorname{sen} 2x$$

■

Exercício 5 *Observe que* ***equação homogênea associada*** *é dada por*

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

cujas soluções são

$$y_1 = e^{-2x}$$

$$y_2 = xe^{-2x}$$

Usando o ***método da variação de parâmetros****, tem-se que*

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x)\,e^{-2x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{-4x}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, f(x) = x^{-2}e^{-2x}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & xe^{-2x} \\ x^{-2}e^{-2x} & (1-2x)\,e^{-2x} \end{vmatrix}$$

$$= -x^{-1}e^{-4x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & x^{-2}e^{-2x} \end{vmatrix}$$

$$= x^{-2}e^{-4x}$$

e,

$$u_1' = \frac{W_1}{W}$$

$$= \frac{-x^{-1}e^{-4x}}{e^{-4x}}$$

$$= -\frac{1}{x}$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W}$$

$$= \frac{x^{-2}e^{-4x}}{e^{-4x}}$$

$$= \frac{1}{x^2}$$

Ou seja

$$u_1 = -\ln|x| + c_1$$

$$u_2 = -\frac{1}{x} + c_2$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Considerando* $c_1 = c_2 = 0$ *e usando o fato de que* $x > 0$, *segue-se que, uma* ***solução particular*** *da equação é*

$$y_p = y_1u_1 + y_2u_2$$

$$= -e^{-2x}\ln|x| - e^{-2x}$$

$$= -e^{-2x}(\ln x + 1)$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma C4

Prof$^{\text{o}}$. Edson

3ª Prova **1º Semestre** **2023**

Data: 12 de Dezembro de 2023 **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Verifique se a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{-n}\right)^{n}$$

converge. Justifique sua resposta!

Problema 2 *Determine o* ***intervalo de convergência*** *da série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{n}\,(x-1)^{2n}}{(2n+1)!}$$

Problema 3 *Determine a equação indicial válida para a equação diferencial*

$$x^2 y'' + 6xy' - y = 0$$

Problema 4 *Encontre a* ***solução geral*** *da equação*

$$(4 - x^2)y'' + 2y = 0$$

Problema 5 *Encontre* ***uma solução*** *da equação*

$$x^2 y'' + 2xy' + 4y = 0$$

Problema 6 *Calcule*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$$

Problema 7 *Resolva o* ***problema de valor inicial***

$$\begin{cases} y'' - 8y' + 15y = 6x\,e^{4x} \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1º Semestre

Gabarito 3ª Prova **2023**
Data: Quarta-feira, 13 de Dezembro **Turma C4**

Exercício 1 *Observe que o termo geral desta série é dado por*

$$a_n = \left(1 + e^{-n}\right)^n$$

*Usando o **teste da raíz**, tem-se que,*

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|(1+e^{-n})^n\right|} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left|1+e^{-n}\right| \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ou seja, o teste é inconclusivo quanto à convergência desta série (quem fez até aqui, obteve 100% da pontuação). Observe entretanto, que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} a_n &= \lim_{n\to+\infty} \left(1+e^{-n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to+\infty} e^{n\,\ln\left(1+e^{-n}\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} e^{A}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to+\infty} n\,\ln\left(1+e^{-n}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+e^{-n}\right)}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{-e^{-n}}{1+e^{-n}}}{-\frac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}}{1+e^{-n}} n^2 \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^n+1} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{e^n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{e^n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} a_n &= \lim_{n\to+\infty} e^{A} \\
&= e^0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Potanto, a série é divergente (se fosse convergente, teríamos $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$). ■

Exercício 2 *Perceba que o termo geral da série em questão é dado por*

$$a_n = \frac{\pi^n\,(x-1)^{2n}}{(2n+1)!}$$

Disto segue-se que

$$a_{n+1} = \frac{\pi^{n+1}\,(x-1)^{2n+2}}{(2n+3)!}$$

*Usando o **teste da razão**, tem-se que*

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\pi^{n+1}\,(x-1)^{2n+2}}{(2n+3)!}\,\frac{(2n+1)!}{\pi^n\,(x-1)^{2n}} \\
&= \frac{\pi\,(x-1)^2}{(2n+3)\,(2n+2)}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\pi\,(x-1)^2}{(2n+3)\,(2n+2)}\right| \\
&= \pi\,(x-1)^2 \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n+3)\,(2n+2)} \\
&= 0 < 1
\end{aligned}$$

Ou seja, a série é covergente para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Observe que $x = 0$ é um ponto singular regular da **edo***

$$x^2y'' + 6xy' - y = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned}
x^2y'' + 6xy' - y = 0 \quad &\Rightarrow \\
x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + & \\
+6x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} - & \\
-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + & \\
+\sum_{n=0}^{\infty}6(n+r)a_n x^{n+r} - & \\
-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \quad &\Rightarrow \\
x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^n + \right. & \\
\left. +\sum_{n=0}^{\infty}6(n+r)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] = 0 \quad &\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1) + 6(n+r) - 1\right]a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left[(n+r)(n+r-1) + 6(n+r) - 1\right]a_n = 0$$

Portanto,

$$a_n = 0$$

ou

$$(n+r)(n+r-1) + 6(n+r) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$n^2 + 2nr + 5n + r^2 + 5r - 1 = 0$$

*Esta equação deve valer para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Logo, quando $n = 0$, tem-se a **equação indicial***

$$r^2 + 5r - 1 = 0$$

■

Exercício 4 *Observe que $x = 0$ é um **ponto ordinário** da equação*

$$\left(4 - x^2\right)y'' + 2y = 0$$

Considere portanto, a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned}
\left(4 - x^2\right)y'' + 2y = 0 \quad &\Rightarrow \\
\left(4 - x^2\right)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + & \\
+2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
4\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - & \\
-x^2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + & \\
+\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
8a_2 + 24a_3x + \sum_{n=2}^{\infty} 4(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + & \\
2a_0 + 2a_1x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[-n(n-1) + 2\right]a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
8a_2 + 24a_3x + \sum_{n=2}^{\infty} 4(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + & \\
+\sum_{n=2}^{\infty}\left[-n(n-1) + 2\right]a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
2a_0 + 8a_2 + (2a_1 + 24a_3)x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[4(n+2)(n+1)a_{n+2} + \right. & \\
\left. (-n^2 + n + 2)a_n\right]x^n = 0 &
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases}
a_2 = -\frac{1}{4}a_0 \\
a_3 = -\frac{1}{12}a_1 \\
a_{n+2} = \dfrac{n^2 - n - 2}{4(n+2)(n+1)}a_n
\end{cases}$$

Supondo $a_0 = 1$ *e* $a_1 = 0$, *tem-se,*

$$a_2 = -\frac{1}{4}$$
$$a_3 = 0$$
$$a_4 = 0$$
$$a_5 = 0$$
$$a_6 = 0$$
$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_1 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots$$
$$= 1 - \frac{1}{4}x^2$$

Supondo agora $a_0 = 0$ *e* $a_1 = 1$, *tem-se,*

$$a_2 = 0$$
$$a_3 = -\frac{1}{12}$$
$$a_4 = 0$$
$$a_5 = -\frac{1}{240}$$
$$a_6 = 0$$
$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_2 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots$$
$$= x - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{240}x^5 - \cdots$$

e a solução geral da equação é

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Observe que*

$$x^2y'' + 2xy' + 4y = 0$$

é uma ***Equação de Euler***, *cuja equação auxiliar é dada por*

$$m^2 + m + 4 = 0$$

cujas solução são

$$m = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}\mathbf{i}$$

ou seja

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$
$$\beta = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Portanto, o conjunto fundamental de solução da equação é dado por

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{\alpha}\cos(\beta \ln x) \\ &= x^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\ln x\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\ln x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= x^{\alpha}\mathrm{sen}\,(\beta \ln x) \\ &= x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\ln x\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\ln x\right) \end{aligned}$$

e a solução geral da equação é

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Obs.: *A resolução desta equação usando o* ***Método de Frobenius*** *conduz a uma equação indicial cujas raízes são complexas e,este caso não foi tratado em sala de aula. Por este motivo, esta questão foi cancelada e os pontos referentes a esta questão foram concedidos a todos os alunos que participaram da prova.* ■

Exercício 6 *Usando* ***frações parciais***, *observe inicialmente que*

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \\ &\quad - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} \\ &= 1 - \cos t \end{aligned}$$

■

Exercício 7 *Utilizando a* ***Transformada de Laplace*** *para a resolução desta equação, observe que*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{y''-8y'+15y\right\} &= \mathcal{L}\left\{6xe^{4x}\right\} \quad \Leftrightarrow\\ \mathcal{L}\left\{y''\right\}-8\mathcal{L}\left\{y'\right\}+15\mathcal{L}\left\{y\right\} &= 6\mathcal{L}\left\{xe^{4x}\right\}\end{aligned}$$

Considerando

$$Y=\mathcal{L}\left\{y\right\},$$

a equação anterior pode ser reescrita como

$$s^2Y-sy(0)-y'(0)-8\left[sY-y(0)\right]+15Y= 6\mathcal{L}\left\{x\right\}\big|_{s-4}$$

Ou seja,

$$\left(s^2-8s+15\right)Y-5s+36=\frac{6}{\left(s-4\right)^2} \quad \Rightarrow$$

$$Y=\frac{5s^3-76s^2+368s-570}{\left(s-4\right)^2\left[(s-4)^2-1\right]}$$

Logo,

$$\begin{aligned}y&=\mathcal{L}^{-1}\left\{Y\right\}\\ &=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s^3-76s^2+368s-570}{\left(s-4\right)^2\left[(s-4)^2-1\right]}\right\}\end{aligned}$$

Usando ***frações parciais****, tem-se que*

$$\begin{aligned}\frac{5s^3-4s^2-208s+577}{\left(s-4\right)^2\left[(s-4)^2-1\right]}&=-\frac{6}{\left(s-4\right)^2}+\frac{5s-30}{(s-4)^2-1}\\ &=-\frac{6}{\left(s-4\right)^2}+\frac{5\left(s-4\right)-10}{(s-4)^2-1}\end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned}y&=-6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s-4\right)^2}\right\}+5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-4}{(s-4)^2-1}\right\}-\\ &\quad -10\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)^2-1}\right\}\\ &=\left(-6x+5\cosh x-10\sinh x\right)e^{4x}\\ &=\left(-6x+\frac{-5e^{x}+15e^{-x}}{2}\right)e^{4x}\end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma C4

Prof$^{\text{o}}$. Edson

Prova Final | **1$^{\text{o}}$ Semestre** | **2023**

Data: 14 de Dezembro de 2023 | **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Resolva a equação*

$$xy\,dy = \left(y^2 + x\right)dx$$

Problema 2 *Resolva a equação*

$$y' = 2\left(\frac{y}{x+y}\right)^2$$

Problema 3 *Encontre uma* ***solução particular*** *para a equação*

$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}\cos 2x$$

Problema 4 *Encontre uma* ***solução particular*** *para a equação*

$$y'' + 4y' + 4y = x^{-2}e^{-2x},\ x > 0$$

Problema 5 *Encontre a* ***solução geral*** *da equação*

$$(4 - x^2)y'' + 2y = 0$$

Problema 6 *Calcule*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$$

Problema 7 *Resolva o* ***problema de valor inicial***

$$\begin{cases} y'' - 8y' + 15y = 6x\,e^{4x} \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito Prova Final **2023**
Data: Quarta-feira, 20 de Dezembro de 2023 **Turma C4**

Exercício 1 *Observe que a equação diferencial*

$$xy\,dy = \left(y^2 + x\right)dx$$

pode ser reescrita como

$$y' - \frac{1}{x}y = y^{-1} \Leftrightarrow yy' - \frac{1}{x}y^2 = 1$$

*que é uma **equação de Bernoulli**.Considere a seguinte mudança de variável*

$$u = y^2$$

disto segue-se,

$$u' = 2yy'$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$u' - \frac{2}{x}u = 2,$$

*que é uma **equação linear** com*

$$p(x) = -\frac{2}{x}$$

$$g(x) = 2$$

Considere portanto,

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \int p(x)dx \\ &= -2\int \frac{dx}{x} \\ &= -2\ln|x| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{-2\ln|x|+c_0} \\ &= \frac{e^{c_0}}{x^2} \\ &= \frac{c_1}{x^2},\ c_1 = e^{c_0}\end{aligned}$$

Tomando $c_1 = 1$, segue-se que

$$\begin{aligned}q(x) &= \int \mu(x)g(x)dx \\ &= \int \frac{2dx}{x^2} \\ &= -\frac{2}{x} + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}u(x) &= \frac{q(x)}{\mu(x)} \\ &= \frac{-\frac{2}{x} + c_2}{\frac{1}{x^2}} \\ &= c_2x^2 - 2x\end{aligned}$$

Ou seja,

$$y^2 = c_2x^2 - 2x \Rightarrow$$

$$y = \sqrt{c_2x^2 - 2x}$$

$\blacksquare$

Exercício 2 *Observe que a equação*

$$y' = 2\left(\frac{y}{x+y}\right)^2$$

pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned}2y^2dx - (x+y)^2\,dy = 0 &\Rightarrow \\ x^2\left[2\frac{y^2}{x^2}dx - \frac{(x+y)^2}{x^2}dy\right] = 0 &\Rightarrow \\ 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 dx - \left(1 + \frac{y}{x}\right)^2 dy = 0&\end{aligned}$$

Considere a seguinte mudança de variável

$$u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux$$

disto segue-se,

$$dy = x\,du + u\,dx$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$\begin{aligned} -u\left(1+u^2\right)\,dx &= (1+u)^2\,x\,du & \Rightarrow \\ \frac{dx}{x} &= \frac{(1+u)^2}{-u\,(1+u^2)}du & \Rightarrow \\ \frac{dx}{x} &= \left(-\frac{1}{u}-\frac{2}{1+u^2}\right)du \end{aligned}$$

Ou seja

$$\ln|x| = -\ln\left|\frac{y}{x}\right| - 2\,\mathrm{arc\,tg}\,\left(\frac{y}{x}\right) + c_0 \Rightarrow$$

$$\ln|y| + 2\,\mathrm{arc\,tg}\,\left(\frac{y}{x}\right) = c_1$$

onde $c_1 = -c_0$ *e* $c_0 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Deseja-se encontrar uma* ***solução particular*** y_p *da equação diferencial*

$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}\cos 2x$$

Observe inicialmente que

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-x}\cos 2x \\ y_2 &= e^{-x}\mathrm{sen}\,2x \end{aligned}$$

são soluções linearmente independentes da equação homogênea associada da edo dada. Desta forma, para utilisar o ***método dos coeficientes a determinar****, é coerente a seguinte proposta de solução particular*

$$\begin{aligned} y_p &= x\left[Ae^{-x}\cos 2x + Be^{-x}\mathrm{sen}\,2x\right] \\ &= x\,(Ay_1 + By_2) \end{aligned}$$

e observe que

$$\begin{aligned} y' &= Ay_1 + By_2 + x\left(Ay_1' + By_2'\right) \\ y'' &= 2Ay_1' + 2By_2' + x\left(Ay_1'' + By_2''\right) \end{aligned}$$

Substituindo-se na equação dada, tem-se

$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}\cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &2Ay_1' + 2By_2' + x\left(Ay_1'' + By_2''\right) + \\ &+2Ay_1 + 2By_2 + 2x\left(Ay_1' + By_2'\right) + \\ &+5x\,(Ay_1 + By_2) = 4e^{-x}\cos 2x \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &xA\left(y_1'' + 2y_1' + 5y_1\right) + \\ &+xB\left(y_2'' + 2y_2' + 5y_2\right) + \\ &2Ay_1' + 2By_2' + 2Ay_1 + 2By_2 = 4e^{-x}\cos 2x \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2A\left(-e^{-x}\cos 2x - 2e^{-x}\mathrm{sen}\,2x\right) + \\ &+2B\left(-e^{-x}\mathrm{sen}\,2x + 2e^{-x}\cos 2x\right) + \\ &+2Ae^{-x}\cos 2x + 2Be^{-x}\mathrm{sen}\,2x = 4e^{-x}\cos 2x \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$4Be^{-x}\cos 2x - 4Ae^{-x}\mathrm{sen}\,2x = 4e^{-x}\cos 2x$$

Ou seja,

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

e, portanto uma ***solução particular*** *é*

$$y_p = xe^{-x}\mathrm{sen}\,2x$$

□

(Outro modo:) *Sabendo que as soluções fundamentais da equação homogênea associada são*

$$y_1 = e^{-x}\cos 2x$$

$$y_2 = e^{-x}\mathrm{sen}\,2x$$

e, usando o ***método da variação dos parâmetros****, segue-se que*

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= 2e^{-2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix},\ f(x) = 4e^{-x}\cos 2x \\ &= \begin{vmatrix} 0 & e^{-x}\mathrm{sen}\,2x \\ 4e^{-x}\cos 2x & \cdots \end{vmatrix} \\ &= -4e^{-2x}\mathrm{sen}\,2x\cos 2x \end{aligned}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^{-x}\cos 2x & 0 \\ \cdots & 4e^{-x}\cos 2x \end{vmatrix}$$

$$= 4e^{-2x}\cos^2 2x$$

e,

$$u_1' = \frac{W_1}{W}$$

$$= \frac{-4e^{-2x}\operatorname{sen} 2x \cos 2x}{2e^{-2x}}$$

$$= -2\operatorname{sen} 2x \cos 2x$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W}$$

$$= \frac{4e^{-2x}\cos^2 2x}{2e^{-2x}}$$

$$= 2\cos^2 2x$$

Ou seja

$$u_1 = -\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{2} + c_1$$

$$u_2 = x + \frac{\operatorname{sen} 2x \cos 2x}{2} + c_2$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Considerando* $c_1 = c_2 = 0$, *segue-se que, uma* ***solução particular*** *da equação é*

$$y_p = y_1u_1 + y_2u_2$$

$$= xe^{-x}\operatorname{sen} 2x$$

■

Exercício 4 *Observe que* ***equação homogênea associada*** *é dada por*

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

cujas soluções são

$$y_1 = e^{-2x}$$

$$y_2 = xe^{-2x}$$

Usando o ***método da variação de parâmetros****, tem-se que*

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x)\,e^{-2x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{-4x}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, \ f(x) = x^{-2}e^{-2x}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & xe^{-2x} \\ x^{-2}e^{-2x} & (1-2x)\,e^{-2x} \end{vmatrix}$$

$$= -x^{-1}e^{-4x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & x^{-2}e^{-2x} \end{vmatrix}$$

$$= x^{-2}e^{-4x}$$

e,

$$u_1' = \frac{W_1}{W}$$

$$= \frac{-x^{-1}e^{-4x}}{e^{-4x}}$$

$$= -\frac{1}{x}$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W}$$

$$= \frac{x^{-2}e^{-4x}}{e^{-4x}}$$

$$= \frac{1}{x^2}$$

Ou seja

$$u_1 = -\ln|x| + c_1$$

$$u_2 = -\frac{1}{x} + c_2$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Considerando* $c_1 = c_2 = 0$ *e usando o fato de que* $x > 0$*, segue-se que, uma* ***solução particular*** *da equação é*

$$\begin{aligned} y_p &= y_1 u_1 + y_2 u_2 \\ &= -e^{-2x} \ln|x| - e^{-2x} \\ &= -e^{-2x}(\ln x + 1) \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Observe que* $x = 0$ *é um* ***ponto ordinário*** *da equação*

$$\left(4 - x^2\right) y'' + 2y = 0$$

Considere portanto, a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned}
\left(4 - x^2\right) y'' + 2y = 0 \quad &\Rightarrow \\
\left(4 - x^2\right) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + & \\
+2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
4\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - & \\
-x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + & \\
+\sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
8a_2 + 24a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} 4(n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + & \\
2a_0 + 2a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[-n(n-1) + 2\right] a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
8a_2 + 24a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} 4(n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + & \\
+\sum_{n=2}^{\infty} \left[-n(n-1) + 2\right] a_n x^n = 0 \quad &\Rightarrow \\
2a_0 + 8a_2 + (2a_1 + 24a_3)\, x + & \\
+\sum_{n=2}^{\infty} \left[4(n+2)(n+1) a_{n+2} + \right. & \\
\left. (-n^2 + n + 2) a_n\right] x^n = 0 &
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} a_2 = -\frac{1}{4} a_0 \\ a_3 = -\frac{1}{12} a_1 \\ a_{n+2} = \dfrac{n^2 - n - 2}{4(n+2)(n+1)} a_n \end{cases}$$

Supondo $a_0 = 1$ *e* $a_1 = 0$*, tem-se,*

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{4} \\ a_3 &= 0 \\ a_4 &= 0 \\ a_5 &= 0 \\ a_6 &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{4} x^2 \end{aligned}$$

Supondo agora $a_0 = 0$ *e* $a_1 = 1$*, tem-se,*

$$\begin{aligned} a_2 &= 0 \\ a_3 &= -\frac{1}{12} \\ a_4 &= 0 \\ a_5 &= -\frac{1}{240} \\ a_6 &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y_2 &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots \\ &= x - \frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{240} x^5 - \cdots \end{aligned}$$

e a solução geral da equação é

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 6 *Usando* ***frações parciais****, observe inicialmente que*

$$\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}$$

Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-$$
$$-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}$$
$$=1-\cos t$$

■

Exercício 7 *Utilizando a* ***Transformada de Laplace*** *para a resolução desta equação, observe que*

$$\mathcal{L}\left\{y''-8y'+15y\right\}=\mathcal{L}\left\{6xe^{4x}\right\}\quad\Leftrightarrow$$
$$\mathcal{L}\left\{y''\right\}-8\mathcal{L}\left\{y'\right\}+15\mathcal{L}\left\{y\right\}=6\mathcal{L}\left\{xe^{4x}\right\}$$

Considerando

$$Y=\mathcal{L}\left\{y\right\},$$

a equação anterior pode ser reescrita como

$$s^2Y-sy(0)-y'(0)-8\left[sY-y(0)\right]+15Y=6\mathcal{L}\left\{x\right\}\big|_{s-4}$$

Ou seja,

$$\left(s^2-8s+15\right)Y-5s+36=\frac{6}{(s-4)^2}\quad\Rightarrow$$
$$Y=\frac{5s^3-76s^2+368s-570}{(s-4)^2\left[(s-4)^2-1\right]}$$

Logo,

$$y=\mathcal{L}^{-1}\left\{Y\right\}$$
$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s^3-76s^2+368s-570}{(s-4)^2\left[(s-4)^2-1\right]}\right\}$$

Usando ***frações parciais****, tem-se que*

$$\frac{5s^3-4s^2-208s+577}{(s-4)^2\left[(s-4)^2-1\right]}=-\frac{6}{(s-4)^2}+\frac{5s-30}{(s-4)^2-1}$$
$$=-\frac{6}{(s-4)^2}+\frac{5\left(s-4\right)-10}{(s-4)^2-1}$$

Ou seja

$$y=-6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)^2}\right\}+5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-4}{(s-4)^2-1}\right\}-$$
$$-10\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)^2-1}\right\}$$
$$=\left(-6x+5\cosh x-10\sinh x\right)e^{4x}$$
$$=\left(-6x+\frac{-5e^x+15e^{-x}}{2}\right)e^{4x}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma E4

Profº. Edson

1ª Prova **1º Semestre** **2024**

Data: 10 de Setembro de 2024 **Duração: 13:00 - 16:00**

Problema 1 *Resolva a equação diferencial*

$$(2x+1)\,y' = 4x + 2y$$

Problema 2 *Resolva o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} e^{-y} - (2y + xe^{-y})\,y' = 0 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

Problema 3 *Resolva a equação diferencial*

$$\left(x^2 + 2x + y\right) dx = \left(x - 3x^2 y\right) dy$$

Problema 4 *Resolva a equação*

$$y^2 + x^2 y' = xy\,y'$$

Problema 5 *Resolva a equação*

$$xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabario 1ª Prova **2024**
Data: Quinta-feira, 12 de Setembro de 2024 **Turma E4**

Exercício 1 *Observe que a equação*

$$(2x+1)y' = 4x + 2y$$

pode ser reescrita da seguinte forma

$$y' - \frac{2}{2x+1}y = \frac{4x}{2x+1},$$

*o que a caracteriza como sendo uma **equação diferencial linear**, em que*

$$p(x) = -\frac{2}{2x+1}$$
$$g(x) = \frac{4x}{2x+1}$$

Desta forma, considere

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \int p(x)dx \\ &= \int -\frac{2}{2x+1}dx \\ &= -\ln|2x+1| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Tomando $c_0 = 0$, tem-se

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{-\ln|2x+1|} \\ &= e^{\ln|2x+1|^{-1}} \\ &= \frac{1}{|2x+1|} \\ &= \pm\frac{1}{2x+1}\end{aligned}$$

Escolhendo

$$\mu(x) = \frac{1}{2x+1}$$

segue-se que,

$$\begin{aligned}q(x) &= \int \mu(x)g(x)dx \\ &= \int \frac{1}{2x+1}\frac{4x}{2x+1}\,dx \\ &= \int \frac{4x}{(2x+1)^2}dx \\ &= \ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{q(x)}{\mu(x)} \\ &= (2x+1)\ln|2x+1| + c_1(2x+1) + 1\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Perceba inicialmente que a equação dada,*

$$e^{-y} - \left(2y + xe^{-y}\right)y' = 0,$$

pode ser reescrita como

$$e^{-y}dx - \left(2y + xe^{-y}\right)dy = 0$$

Considerando

$$M(x,y) = e^{-y}$$
$$N(x,y) = -2y - xe^{-y},$$

tem-se,

$$M_y(x,y) = -e^{-y}$$
$$N_x(x,y) = -e^{-y}$$

Ou seja,

$$M_y(x,y) = N_x(x,y), \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

*o que permite afirmar que a equação em questão é **exata*** *e, portanto existe uma função $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = M(x,y) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = N(x,y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = e^{-y} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = -2y - xe^{-y} \end{cases}$$

Ou seja,

$$\varphi(x,y) = xe^{-y} - y^2 + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$$

e a solução da equação em questão é

$$\varphi(x,y) = c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

Ou seja

$$xe^{-y} - y^2 = c,\ c \in \mathbb{R}$$

Como sabe-se que

$$y(1) = 3$$

segue-se que

$$c = e^{-3} - 9$$

e a solucção do problema de valor inicial dado é

$$xe^{-y} - y^2 = e^{-3} - 9$$

■

Exercício 3 *Para a resolução da equação*

$$\left(x^2 + 2x + y\right) dx = \left(x - 3x^2 y\right) dy$$

Observe que esta, pode ser reescrita como

$$\left(x^2 + 2x + y\right) dx + \left(3x^2 y - x\right) dy = 0$$

Assim, considere

$$M(x,y) = x^2 + 2x + y$$

$$N(x,y) = 3x^2 y - x$$

e observe que

$$N_x = 6xy - 1$$

$$M_y = 1$$

e

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{M_y - N_x}{N} \\ &= \frac{-2\,(3xy-1)}{x\,(3xy-1)} \\ &= -\frac{2}{x} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int \varphi(x) dx \\ &= \int -\frac{2}{x} dx \\ &= -2\ln|x| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tomando $c_0 = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{\ln|x|^{-2}} \\ &= \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Multiplicando a equação dada por μ, tem-se

$$\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(3y - \frac{1}{x}\right) dy = 0$$

*que, agora é **exata**. Logo, existe uma função $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{y}{x^2} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 3y - \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Ou seja,

$$\varphi(x,y) = \frac{3}{2}y^2 - \frac{y}{x} + x + 2\ln x + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

e a solução da equação em questão é, portanto

$$\varphi(x,y) = c_3,\ c_3 \in \mathbb{R}$$

Ou seja

$$\frac{3}{2}y^2 - \frac{y}{x} + x + 2\ln x = c,\ c \in \mathbb{R}$$

■

Exercício 4 *Observe que a equação*

$$y^2 + x^2 y' = xy\,y'$$

pode ser reescrita da seguinte maneira

$$y^2 dx + \left(x^2 - xy\right) dy = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 \left[\frac{y^2}{x^2} dx + \frac{x^2 - xy}{x^2} dy\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 dx + \left(1 - \frac{y}{x}\right) dy = 0$$

Considere a seguinte mudança de variável

$$u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux$$

disto segue-se,

$$dy = x\,du + u\,dx$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$\begin{aligned} -u\,dx &= (1-u)\,x\,du && \Rightarrow \\ -\frac{dx}{x} &= \frac{(1-u)}{u} du && \Rightarrow \\ -\frac{dx}{x} &= \left(\frac{1}{u} - 1\right) du \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} -\ln|x| = \ln\left|\frac{y}{x}\right| - \frac{y}{x} + c_0 && \Rightarrow \\ -\ln|x| - \ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{y}{x} = c_0 && \Rightarrow \\ \frac{y}{x} - \ln|y| = c_0 && \Rightarrow \end{aligned}$$

onde $c_0 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Observe que a equação diferencial*

$$xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$$

pode ser reescrita como

$$y' - \frac{4}{x} y = 2xy^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} \frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} y^{\frac{1}{2}} = 2x$$

que é uma ***equação de Bernoulli****. Considere a seguinte mudança de variável*

$$u = y^{\frac{1}{2}}$$

disto segue-se,

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} \frac{dy}{dx}$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$\frac{du}{dx} - \frac{2}{x} u = x,$$

que é uma ***equação linear*** *com*

$$p(x) = -\frac{2}{x}$$

$$g(x) = x$$

Considere portanto,

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int p(x) dx \\ &= -2\int \frac{dx}{x} \\ &= -2\ln|x| + c_0, \ c_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e, tomando $c_0 = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{-2\ln|x|} \\ &= \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} q(x) &= \int \mu(x) g(x) dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx \\ &= \ln|x| + c_1, \ c_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{q(x)}{\mu(x)} \\ &= \frac{\ln|x| + c_1}{\frac{1}{x^2}} \\ &= x^2 \left(\ln|x| + c_1\right) \end{aligned}$$

Ou seja,

$$y^{\frac{1}{2}} = x^2\left(\ln|x| + c_1\right) \Rightarrow$$

$$y = x^4 \left(\ln|x| + c_1\right)^2$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma E4

Prof°. Edson

2ª Prova **1º Semestre** **2024**

Data: 22 de outubro de 2024 **Duração: 13:00 - 16:00**

Problema 1 *Sabendo que a função $y_1 = x$ é uma solução da equação*

$$x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0,$$

*encontre **outra solução** desta **edo**, que seja linearmente independente de y_1.*

Problema 2 *Resolva a equação*

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$$

Problema 3 *Encontre a **solução geral** da equação*

$$y'' + 2y' - 15y = 3 + 2x \operatorname{sen} x$$

Problema 4 *Encontre uma **solução particular** para a equação*

$$y'' + 4y = \operatorname{cossec} 2x$$

Problema 5 *Resolva o **problema de valor inicial***

$$\begin{cases} y'' - 4y = 32x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 2ª Prova **2024**
Data: Quarta-feira, 23 de Outubro **Turma E4**

Exercício 1 *Observe que a equação*

$$x^2 (\ln x - 1)\, y'' - xy' + y = 0,$$

*pode ser reescrita em sua **forma padrão** da seguinte forma,*

$$y'' - \frac{1}{x(\ln x - 1)} y' + \frac{1}{x^2 (\ln x - 1)} y = 0$$

onde

$$P(x) = -\frac{1}{x(\ln x - 1)}$$

Deseja-se encontrar uma outra solução desta equação sabendo que

$$y_1 = x$$

*é uma solução. Usando da **redução de ordem**, considere*

$$\begin{aligned}
\eta(x) &= \int -P(x)dx \\
&= \int \frac{1}{x(\ln x - 1)} dx \\
&= \ln|\ln x - 1| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Tomando $c_0 = 0$, segue-se que

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= e^{\eta(x)} \\
&= e^{\ln|\ln x - 1|} \\
&= |\ln x - 1| \\
&= \pm(\ln x - 1)
\end{aligned}$$

Escolhendo

$$\mu(x) = \ln x - 1$$

Logo,

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int \frac{\mu(x)}{y_1^2} dx \\
&= \int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx \\
&= -\frac{\ln x}{x} + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Tomando $c_1 = 0$, tem-se,

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= u(x) y_1(x) \\
&= -\frac{\ln x}{x} x \\
&= -\ln x
\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Perceba que a equação dada,*

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$$

*trata-se de uma **equação de Cauchy-Euler**. Portanto, considere a seguinte proposta de solução*

$$y = x^m,\ m \in \mathbb{R}$$

Disto segue-se que

$$\begin{aligned}
y' &= m\, x^{m-1} \\
y'' &= m(m-1)\, x^{m-2} \\
y''' &= m(m-1)(m-2)\, x^{m-3}
\end{aligned}$$

*Substituindo na **edo** em questão, tem-se*

$$\begin{aligned}
x^3 \left[m(m-1)(m-2)x^{m-3}\right] - &\\
-3x^2 \left[m(m-1)x^{m-2}\right] + &\\
+6x\left[m\, x^{m-1}\right] - 6\left[x^m\right] &= 0 \Rightarrow \\
m(m-1)(m-2)x^m - 3m(m-1)x^m + &\\
+6m\, x^m - 6x^m &= 0 \Rightarrow \\
x^m \left[m(m-1)(m-2) - 3m(m-1) + \right. &\\
\left. +6m - 6\right] &= 0 \Rightarrow \\
m(m-1)(m-2) - 3m(m-1) + 6m - 6 &= 0 \Rightarrow \\
m^3 - 6m^2 + 11m - 6 &= 0
\end{aligned}$$

Perceba que

$$m_1 = 1$$

é uma solução desta equação e

$$m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = (m-1)\left(m^2 - 5m + 6\right)$$

Ou seja, as outras soluções desta equação são a raízes da equação

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

que são

$$m_2 = 2$$

$$m_3 = 3$$

Assim, o ***conjunto fundamental de soluções*** *da equação diferencial em questão é*

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{m_1} \\ &= x \\ y_2 &= x^{m_2} \\ &= x^2 \\ y_3 &= x^{m_3} \\ &= x^3 \end{aligned}$$

Logo, a ***solução geral*** *da equação é*

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \\ &= c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \end{aligned}$$

com c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Observe inicialmente que a* ***edo*** *em questão,*

$$y'' + 2y' - 15y = 3 + 2x \operatorname{sen} x$$

possui equação homogênea associada

$$y'' + 2y' - 15y = 0,$$

cuja equação característica é

$$m^2 + 2m - 15 = 0,$$

cujas soluções são

$$m_1 = 3$$

$$m_2 = -5$$

Ou seja, o ***conjunto fundamental de soluções*** *da equação homogênea em questão é*

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{m_1 x} \\ &= e^{3x} \\ y_2 &= e^{m_2 x} \\ &= e^{-5x} \end{aligned}$$

Logo, a ***solução complementar*** *da equação é*

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 e^{3x} + c_2 e^{-5x} \end{aligned}$$

com c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

É necessário agora, encontrar uma ***solução particular*** *da* ***edo*** *original.Para isto considere a seguinte proposta de solução*

$$y_p = A + (Bx + C) \operatorname{sen} x + (Dx + E) \cos x$$

Observe que

$$y_p' = (-Dx + B - E) \operatorname{sen} x + (Bx + C + D) \cos x$$

$$y_p'' = (-Bx - C - 2D) \operatorname{sen} x + (-Dx + 2B - E) \cos x$$

Substituindo na equação, tem-se

$$\begin{aligned} (-Bx - C - 2D) \operatorname{sen} x + (-Dx + 2B - E) \cos x + \\ +2\left[(-Dx + B - E) \operatorname{sen} x + (Bx + C + D) \cos x\right] - \\ -15\left[A + (Bx + C) \operatorname{sen} x + (Dx + E) \cos x\right] &= \\ 3 + 2x \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -15A + \\ + \left[(-16B - 2D)\, x + 2B - 16C - 2D - 2E\right] \operatorname{sen} x + \\ \left[(2B - 16D)\, x + 2B + 2C + 2D - 16E\right] \cos x &= \\ 3 + 2x \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} -15A = 3 \\ 2B - 16C - 2D - 2E = 0 \\ -16B - 2D = 2 \\ 2B - 16D = 0 \\ 2B + 2C + 2D - 16E = 0 \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{cases} A = -\dfrac{1}{5} \\ B = -\dfrac{8}{65} \\ C = -\dfrac{47}{4225} \\ D = -\dfrac{1}{65} \\ E = -\dfrac{79}{4225} \end{cases}$$

e,

$y_p = -\frac{1}{5} - \left(\frac{8}{65}x + \frac{47}{4225}\right)\operatorname{sen} x - \left(\frac{1}{65}x + \frac{79}{4225}\right)\cos x$

e a solução geral que deseja-se encontrar é dada por

$$\begin{aligned} y_g &= y_c + y_p \\ &= -\frac{1}{5} + c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} - \left(\frac{8}{65}x + \frac{47}{4225}\right)\operatorname{sen} x - \\ &\quad - \left(\frac{1}{65}x + \frac{79}{4225}\right)\cos x \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Deseja-se encontrar uma* ***solução particular*** y_p *da equação diferencial*

$$y'' + 4y = \operatorname{cossec} 2x$$

Observe inicialmente que

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos 2x \\ y_2 &= \operatorname{sen} 2x \end{aligned}$$

são soluções linearmente independentes da equação homogênea associada da ***edo*** *dada. Usando o* ***método da variação dos parâmetros****, segue-se que*

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, \ f(x) = \operatorname{cossec} 2x \\ &= \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} 2x \\ \operatorname{cossec} 2x & \cdots \end{vmatrix} \\ &= -\operatorname{cossec} 2x \operatorname{sen} 2x \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ \cdots & \operatorname{cossec} 2x \end{vmatrix} \\ &= \cos 2x \operatorname{cossec} 2x \\ &= \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{W_2}{W} \\ &= \frac{\cos 2x}{2\operatorname{sen} 2x} \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{x}{2} + c_1 \\ u_2 &= \int u_2' dx \\ &= \int \frac{\cos 2x}{2\operatorname{sen} 2x} dx \\ &= \frac{1}{4}\ln|\operatorname{sen} 2x| + c_2 \end{aligned}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Considerando* $c_1 = c_2 = 0$ *, segue-se que, uma* ***solução particular*** *da equação é*

$$\begin{aligned} y_p &= y_1 u_1 + y_2 u_2 \\ &= -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x \ \ln|\operatorname{sen} 2x| \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Observe que* ***equação homogênea associada*** *é dada por*

$$y'' - 4y = 0$$

cujas soluções são

$$y_1 = e^{2x}$$

$$y_2 = e^{-2x}$$

Logo, a solução complementar da equação dada é

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Usando o ***método dos coeficientes a determinar****, para encontrar uma solução particular, considere a seguinte proposta*

$$y_p = Ax + B$$

Observe que

$$y_p' = A$$

$$y_p'' = 0$$

Substituindo na edo original, tem-se

$$y_p'' - 4y_p = 32x \Rightarrow$$

$$0 - 4\left(Ax + B\right) = 32x \Rightarrow$$

$$Ax + B = -8x$$

Ou seja

$$A = -8$$

$$B = 0$$

e

$$y_p = -8x$$

Por fim, a solução geral do problema é dada por

$$\begin{aligned} y_g &= y_c + y_p \\ &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - 8x \end{aligned}$$

Observe que

$$y_g' = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{2x} - 8$$

e, usando as condições iniciais dadas, segue-se que

$$\left\{ \begin{array}{l} y_g(0) = 0 \\ y_g'(0) = 6 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 7 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{7}{2} \\ c_2 = -\frac{7}{2} \end{array} \right.$$

Ou seja, a solução do problema é

$$y = \frac{7}{2} e^{2x} - \frac{7}{2} e^{-2x} - 8x$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma E4

Profº. Edson

3ª Prova **1º Semestre** **2024**

Data: 03 de Dezembro de 2024 **Duração: 14:00 - 16:00**

Problema 1 *Determine o* ***intervalo de convergência*** *da série*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{2n}}{4^n}$$

Problema 2 *Encontre a* ***solução geral*** *da equação*

$$(1+2x^2)y'' + 3xy' + y = 0$$

Problema 3 *Encontre* ***uma solução*** *da equação*

$$4x^2y'' + 2xy' + (x-2)y = 0$$

Problema 4 *Calcule*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s^2+9s-28}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}$$

Problema 5 *Resolva o* ***problema de valor inicial***

$$\begin{cases} y'' + 3y' - 4y = 6\,e^{2t} \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = 5 \end{cases}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 3ª Prova **2024**
Data: Sexta-feira, 6 de Dezembro **Turma E4**

Exercício 1 *Observe que o termo geral desta série é dado por*

$$a_n = \frac{(-1)^n (x-1)^{2n}}{4^n}$$

Assim,

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^{2(n+1)}}{4^{n+1}}$$

e,

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(-1)^{n+1} (x-1)^{2(n+1)}}{4^{n+1}} \frac{4^n}{(-1)^n (x-1)^{2n}}\right| \\ &= \left|\frac{(-1)(x-1)^2}{4}\right| \\ &= \frac{(x-1)^2}{4}\end{aligned}$$

Usando o ***teste da razão****, tem-se que,*

$$\begin{aligned}L &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{(x-1)^2}{4} \\ &= \frac{(x-1)^2}{4}\end{aligned}$$

e a série será ***convergente*** *quando $L<1$, ou seja*

$$\begin{aligned}\tfrac{(x-1)^2}{4} < 1 &\Rightarrow \\ (x-1)^2 < 4 &\Rightarrow \\ \sqrt{(x-1)^2} < 2 &\Rightarrow \\ |x-1| < 2 &\Rightarrow \\ -2 < x-1 < 2 &\Rightarrow \\ -1 < x < 3 &\end{aligned}$$

Ou seja, o ***intervalo de convergência*** *da série é $(-1,3)$.* ■

Exercício 2 *Observe que $x=0$ é um ponto ordinário da* ***edo***

$$(1+2x^2)y'' + 3xy' + y = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$(1+2x^2)y'' + 3xy' + y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}&(1+2x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \\ &+3x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1)a_n x^n + \\ &+\sum_{n=1}^{\infty} 3n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \\ &\sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1)a_n x^n + \\ &+\sum_{n=1}^{\infty} 3n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \\ &\sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1)a_n x^n + \\ &3a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} 3n a_n x^n + a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(2a_2 + a_0) + (6a_3 + 4a_1)\,x + \\ &\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + \right. \\ &\left. + (2n(n-1) + 3n + 1)\,a_n\right] x^n = 0\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} a_2 = -\dfrac{a_0}{2} \\ a_3 = -\dfrac{2a_1}{3} \\ a_{n+2} = -\dfrac{2n^2+n+1}{(n+2)(n+1)}a_n \end{cases}$$

Supondo $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, tem-se,

$$a_2 = -\frac{1}{2}$$
$$a_3 = 0$$
$$a_4 = \frac{11}{24}$$
$$a_5 = 0$$
$$a_6 = -\frac{407}{720}$$
$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_1 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{24}x^4 - \frac{407}{720}x^6 + \cdots$$

Supondo agora $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, tem-se,

$$a_2 = 0$$
$$a_3 = -\frac{2}{3}$$
$$a_4 = 0$$
$$a_5 = \frac{11}{15}$$
$$a_6 = 0$$
$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_2 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots$$
$$= x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{15}x^5 - \cdots$$

e a solução geral da equação é

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Observe que $x = 0$ é um ponto* ***singular regular*** *da* ***edo***

$$4x^2y'' + 2xy' + (x-2)y = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}$$
$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned}
&4x^2y'' + 2xy' + (x-2)y = 0 \quad \Rightarrow \\
&4x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2} + \\
&+2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1} + \\
&+(x-2)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow \\
&\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r} + \\
&+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)a_nx^{n+r} + \\
&\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow \\
&x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_nx^n + \right. \\
&\left. +\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)a_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^n\right] = 0 \quad \Rightarrow \\
&\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_nx^n + \\
&+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)a_nx^n + \\
&+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^n = 0 \quad \Rightarrow \\
&4r(r-1)a_0 + 2ra_0 - 2a_0 + \\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\left[4(n+r)(n+r-1)a_n + \right. \\
&\left. +2(n+r)a_n - 2a_n + a_{n-1}\right]x^n = 0
\end{aligned}$$

*Portanto, a **equação indicial** é dada por*

$$[4r(r-1)+2r-2]\,a_0 = 0 \Rightarrow$$

$$2r^2 - r - 1 = 0$$

ou seja,

$$r = 1 \text{ ou } r = -\frac{1}{2}$$

Além disto, tem-se também que

$$[4(n+r)(n+r-1)+2(n+r)-2]\,a_n + a_{n-1} = 0$$

*donde segue-se a seguinte **relação de recorrência***

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{4(n+r)(n+r-1)+2(n+r)-2}$$

Para $r = 1$, tal relação torna-se

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2n(2n+3)}$$

Supondo $a_0 = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{10} \\ a_2 &= \frac{1}{280} \\ a_3 &= -\frac{1}{15120} \\ a_4 &= \frac{1}{1330560} \\ a_5 &= -\frac{1}{172972800} \end{aligned}$$

e, uma solução da equação dada é

$$\begin{aligned} y_1 = x - \frac{x^2}{10} + \frac{x^3}{280} - \frac{x^4}{15120} + \\ + \frac{x^5}{1330560} - \frac{x^6}{172972800} + \cdots \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Inicialmente observe que*

$$\begin{aligned} \frac{4s^2+9s-28}{(s-1)(s-2)(s+4)} &= \frac{(s+4)\,(4s-7)}{(s-1)(s-2)(s+4)} \\ &= \frac{4s-7}{(s-1)(s-2)} \end{aligned}$$

*e, usando **frações parciais**, tem-se*

$$\begin{aligned} \frac{4s^2+9s-28}{(s-1)(s-2)(s+4)} &= \frac{4s-7}{(s-1)(s-2)} \\ &= \frac{3}{s-1} + \frac{1}{s-2} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s^2+9s-28}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-1} + \frac{1}{s-2}\right\} \\ &= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \\ &+ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \\ &= 3e^t + e^{2t} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Utilizando a **Transformada de Laplace** para a resolução desta equação, observe que*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'' + 3y' - 4y\} &= \mathcal{L}\{6e^{2t}\} \quad \Leftrightarrow \\ \mathcal{L}\{y''\} + 3\mathcal{L}\{y'\} - 4\mathcal{L}\{y\} &= 6\mathcal{L}\{e^{2t}\} \end{aligned}$$

Considerando

$$Y = \mathcal{L}\{y\},$$

a equação anterior pode ser reescrita como

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 3\,[sY - y(0)] - 4Y = 6\mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \left(s^2+3s-4\right)Y - 4s - 17 &= \frac{6}{s-2} && \Rightarrow \\ (s+4)\,(s-1)\,Y &= \frac{4s^2+9s-28}{s-2} && \Rightarrow \\ Y &= \frac{4s^2+9s-28}{(s-1)\,(s-2)\,(s+4)} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}^{-1}\{Y\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s^2+9s-28}{(s-1)\,(s-2)\,(s+4)}\right\} \end{aligned}$$

*e, de acordo com o **Exercício 4**, tem-se*

$$y = 3e^t + e^{2t}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma E4

Prof. Edson

Prova Final | **1º Semestre** | **2024**

Data: 10 de Dezembro de 2024 | **Duração: 14:00 - 16:00**

Problema 1 *Resolva a equação*

$$xy\,dy = \left(y^2 + x\right)dx$$

Problema 2 *Encontre uma* ***solução particular*** *para a equação*

$$y'' - 2y' + y = e^x\sqrt{x}$$

Problema 3 *Resolva a equação*

$$x^2y'' + 5xy' + 8y = 0$$

Problema 4 *Calcule*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+s+1}{(s^2+4)(s^2-9)}\right\}$$

Problema 5 *Resolva o* ***problema de valor inicial***

$$\begin{cases} y'' + 3y' - 4y = 6\,e^{2t} \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = 5 \end{cases}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito Prova Final **2024**
Data: Quarta-feira, 11 de Dezembro **Turma E4**

Exercício 1 *Observe que a equação diferencial*

$$xy\,dy = \left(y^2 + x\right) dx$$

pode ser reescrita como

$$y' - \frac{1}{x}y = y^{-1} \Leftrightarrow yy' - \frac{1}{x}y^2 = 1$$

que é uma ***equação de Bernoulli****.Considere a seguinte mudança de variável*

$$u = y^2$$

disto segue-se,

$$u' = 2yy'$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$u' - \frac{2}{x}u = 2,$$

que é uma ***equação linear*** *com*

$$p(x) = -\frac{2}{x}$$

$$g(x) = 2$$

Considere portanto,

$$\eta(x) = \int p(x)dx$$

$$= -2\int \frac{dx}{x}$$

$$= -2\ln|x| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}$$

e

$$\mu(x) = e^{\eta(x)}$$

$$= e^{-2\ln|x|+c_0}$$

$$= \frac{e^{c_0}}{x^2}$$

$$= \frac{c_1}{x^2},\ c_1 = e^{c_0}$$

Tomando $c_1 = 1$, segue-se que

$$q(x) = \int \mu(x)g(x)dx$$

$$= \int \frac{2dx}{x^2}$$

$$= -\frac{2}{x} + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

e

$$u(x) = \frac{q(x)}{\mu(x)}$$

$$= \frac{-\frac{2}{x} + c_2}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= c_2x^2 - 2x$$

Ou seja,

$$y^2 = c_2x^2 - 2x \Rightarrow$$

$$y = \sqrt{c_2x^2 - 2x}$$

■

Exercício 2 *Observe que a* ***equação auxiliar*** *da* ***equação homogênia associada*** *é dada por*

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 0$$

ou sejam

$$m_1 = m_2 = 1$$

e o ***conjunto fundamental*** *de soluções é*

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{m_1 x} \\ &= e^x \\ y_2 &= x\,y_1 \\ &= xe^x \end{aligned}$$

Usando o ***método da variação de parâmetros****, tem-se que*

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (1+x)\,e^x \end{vmatrix} \\ &= e^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, \; f = e^x\sqrt{x} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ e^x\sqrt{x} & (1+x)\,e^x \end{vmatrix} \\ &= -xe^{2x}\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^x\sqrt{x} \end{vmatrix} \\ &= e^{2x}\sqrt{x} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} \\ &= \frac{-xe^{2x}\sqrt{x}}{e^{2x}} \\ &= -x\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{W_2}{W} \\ &= \frac{e^{2x}\sqrt{x}}{e^{2x}} \\ &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

Ou seja

$$u_1 = -\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + c_0$$

$$u_2 = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c_1$$

com $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. *Considerando* $c_0 = c_0 = 0$ *e* $x > 0$, *segue-se que, uma* ***solução particular*** *da equação é*

$$\begin{aligned} y_p &= y_1u_1 + y_2u_2 \\ &= -\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}e^x + \frac{2}{3}x^2\sqrt{x}e^x \\ &= \frac{4}{15}x^2\sqrt{x}e^x \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Sendo esta um* ***equação de Euler****, segue-se ue sua* ***equação auxiliar*** *é dada por*

$$m^2 + 4m + 8 = 0$$

cujas raízes são

$$m_1 = -2 + 2\mathbf{i}$$

$$m_2 = -2 - 2\mathbf{i}$$

Ou seja,

$$\alpha = -2$$

$$\beta = \;\; 2$$

e, o ***conjunto fundamental*** *de soluções é*

$$\begin{aligned} y_1 &= x^\alpha \cos(\beta \ln x) \\ &= x^{-2}\cos(2\ln x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= x^\alpha \text{sen}(\beta \ln x) \\ &= x^{-2}\text{sen}(2\ln x) \end{aligned}$$

Portanto, a ***solução geral*** *é,*

$$\begin{aligned} y_g &= c_1y_1 + c_2y_2 \\ &= c_1x^{-2}\cos(2\ln x) + c_2x^{-2}\text{sen}(2\ln x) \\ &= \frac{1}{x^2}\left[c_1\cos(2\ln x) + c_2\text{sen}(2\ln x)\right] \end{aligned}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 4 *Usando* ***frações parciais****, observe inicialmente que*

$$\frac{s^2+s+1}{(s^2+4)(s^2-9)} = \frac{3}{13}\frac{1}{s^2+4} - \frac{1}{13}\frac{s}{s^2+4} - $$

$$- \frac{7}{78}\frac{1}{s+3} + \frac{1}{6}\frac{1}{s-3}$$

Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+s+1}{(s^2+4)(s^2-9)}\right\} = \frac{3}{13}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} - \frac{1}{13}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \frac{7}{78}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$= \frac{3}{26}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{13}\cos 2t - \frac{7}{78}e^{-3t} + \frac{1}{6}e^{3t}$$

■

Exercício 5 *Utilizando a* ***Transformada de Laplace*** *para a resolução desta equação, observe que*

$$\mathcal{L}\{y''+3y'-4y\} = \mathcal{L}\{6e^{2t}\} \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{L}\{y''\}+3\mathcal{L}\{y'\}-4\mathcal{L}\{y\} = 6\mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

Considerando

$$Y = \mathcal{L}\{y\},$$

a equação anterior pode ser reescrita como

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 3[sY - y(0)] - 4Y = 6\mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

Ou seja,

$$\left(s^2+3s-4\right)Y - 4s - 17 = \frac{6}{s-2} \Rightarrow$$

$$(s+4)(s-1)Y = \frac{4s^2+9s-28}{s-2} \Rightarrow$$

$$Y = \frac{4s^2+9s-28}{(s-1)(s-2)(s+4)}$$

Logo,

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s^2+9s-28}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}$$

Usando frações parciais, tem-se que

$$\frac{4s^2+9s-28}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{4s-7}{(s-1)(s-2)} = \frac{3}{s-1}+\frac{1}{s-2}$$

ou seja,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s^2+9s-28}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-1}+\frac{1}{s-2}\right\} = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = 3e^t + e^{2t}$$

Portanto,

$$y = 3e^t + e^{2t}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma M4

Profº. Edson

1ª Prova | **1º Semestre** | **2025**

Data: 03 de Abril de 2025 | **Duração: 13:00 - 16:00**

Problema 1 *Resolva o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' + y \operatorname{tg} x = \sec x \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$$

Problema 2 *Resolva a equação diferencial*

$$\left(2 + \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(y - \frac{1}{x}\right) dy = 0$$

Problema 3 *Resolva a equação diferencial*

$$y dx + \left(2xy - e^{-2y}\right) dy = 0$$

Problema 4 *Resolva a equação*

$$xy' - y = x \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Problema 5 *Resolva a equação*

$$x\frac{dy}{dx} - (1 + x)\, y = xy^2$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 1ª Prova **2025**
Data: Quarta-feira, 09 de Abril **Turma M4**

Exercício 1 *Observe que a equação*

$$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sec x$$

pode ser reescrita da seguinte forma

$$y' + (\mathrm{tg}\,x)\ y = \sec x,$$

o que a caracteriza como uma ***equação diferencial linear****, em que*

$$p(x) = \mathrm{tg}\,x$$
$$f(x) = \sec x$$

Desta forma, considere

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int p(x)dx \\ &= \int \mathrm{tg}\,x\,dx \\ &= -\ln|\cos x| + c_0,\ \ c_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tomando $c_0 = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\eta(x)} \\ &= e^{-\ln|\cos x|} \\ &= e^{\ln|\cos x|^{-1}} \\ &= \frac{1}{|\cos x|} \\ &= \pm\frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

Escolhendo

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \frac{1}{\cos x} \\ &= \sec x \end{aligned}$$

segue-se que,

$$\begin{aligned} q(x) &= \int \mu(x) f(x)dx \\ &= \int \sec x\ \sec x\,dx \\ &= \int \sec^2 x dx \\ &= \mathrm{tg}\,x + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{\mathrm{tg}\,x + c_1}{\sec x} \\ &= \cos x\,(\mathrm{tg}\,x + c_1) \\ &= \mathrm{sen}\,x + c_1 \cos x \end{aligned}$$

Sabe-se que

$$y(\pi) = 1$$

e disto segue-se que

$$\begin{aligned} \mathrm{sen}\,\pi + c_1\cos\pi &= 1 \qquad \Rightarrow \\ -c_1 &= 1 \qquad \Rightarrow \\ c_1 &= -1 \end{aligned}$$

e, portanto

$$y(x) = \mathrm{sen}\,x - \cos x$$

■

Exercício 2 *Deseja-se resolver a equação*

$$\left(2 + \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(y - \frac{1}{x}\right) dy = 0$$

Para isso, considere

$$M(x,y) = 2 + \frac{y}{x^2}$$

$$N(x,y) = y - \frac{1}{x}$$

e observe que,

$$M_y(x,y) = \frac{1}{x^2}$$

$$N_x(x,y) = \frac{1}{x^2}$$

Ou seja,

$$M_y(x,y) = N_x(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

o que permite afirmar que a equação em questão é ***exata*** *e, portanto existe uma função $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = M(x,y) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = N(x,y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 2 + \dfrac{y}{x^2} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = y - \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Ou seja,

$$\varphi(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} + 2x + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$$

e a solução da equação em questão é

$$\varphi(x,y) = c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

Ou seja

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} + 2x = c,\ c \in \mathbb{R}$$

■

Exercício 3 *Para a resolução da equação*

$$y dx + \left(2xy - e^{-2y}\right) dy = 0,$$

considere

$$M(x,y) = y$$

$$N(x,y) = 2xy - e^{-2y}$$

e observe que

$$N_x = 2y$$

$$M_y = 1$$

e

$$\begin{aligned} P(y) &= \frac{N_x - M_y}{M} \\ &= \frac{2y-1}{y} \\ &= 2 - \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int P(x) dx \\ &= \int \left(2 - \frac{1}{y}\right) dy \\ &= 2y - \ln|y| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tomando $c_0 = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \mu(y) &= e^{\eta(y)} \\ &= e^{2y} e^{\ln|y|^{-1}} \\ &= \frac{e^{2y}}{|y|} \\ &= \pm \frac{e^{2y}}{y} \end{aligned}$$

Escolhendo

$$\mu(y) = \frac{e^{2y}}{y}$$

e multiplicando a equação dada por μ, tem-se

$$\left[e^{2y} dx + \left(2xe^{2y} - \frac{1}{y}\right) dy\right] = 0$$

que, agora é ***exata****. Logo, existe uma função $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = e^{2y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 2xe^{2y} - \dfrac{1}{y} \end{cases}$$

Ou seja,

$$\varphi(x,y) = xe^{2y} - \ln|y| + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

e a solução da equação em questão é, portanto

$$\varphi(x,y) = c_3,\ c_3 \in \mathbb{R}$$

Ou seja

$$xe^{2y} - \ln|y| = c,\ c \in \mathbb{R}$$

■

Exercício 4 *Observe que a equação*

$$xy' - y = x\,\mathrm{tg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

pode ser reescrita da seguinte maneira

$$x\frac{dy}{dx} - y - x\,\mathrm{tg}\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$x\,dy - \left[y + x\,\mathrm{tg}\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx = 0 \Rightarrow$$

$$\left[y + x\,\mathrm{tg}\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx - x\,dy = 0$$

Perceba que trata-se de uma equação homogênea, e colocando x em evidêcia tem-se

$$x\left\{\left[\frac{y}{x} + \mathrm{tg}\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx - dy\right\} = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{y}{x} + \mathrm{tg}\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx - dy = 0$$

Considere a seguinte mudança de variável

$$u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux$$

disto segue-se,

$$dy = x\,du + u\,dx$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$[u + \mathrm{tg}\,(u)]\,dx - (x\,du + u\,dx) = 0 \Rightarrow$$

$$(u + \mathrm{tg}\,u - u)\,dx - xdu = 0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{tg}\,u\,dx - xdu = 0$$

que é uma equação separável, e disto segue-se que

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\mathrm{tg}\,u} \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{\cos u}{\mathrm{sen}\,u}du \Rightarrow$$

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{\cos u}{\mathrm{sen}\,u}du$$

Ou seja

$$\ln|x| = \ln|\mathrm{sen}\,u| + c_0 \Rightarrow$$

$$\ln|x| - \ln\left|\mathrm{sen}\,\left(\frac{y}{x}\right)\right| = c_0 \Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{x}{\mathrm{sen}\,\left(\frac{y}{x}\right)}\right| = c_0 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{\mathrm{sen}\,\left(\frac{y}{x}\right)} = e^{c_0} \Rightarrow$$

$$x - c_1\mathrm{sen}\,\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

onde $c_1 = e^{c_0}$ e $c_0 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Observe que a equação diferencial*

$$x\frac{dy}{dx} - (1+x)\,y = xy^2$$

pode ser reescrita como

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1+x}{x}y = y^2 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} - \frac{1+x}{x}y^{-1} = 1$$

*que é uma **equação de Bernoulli**. Considere a seguinte mudança de variável*

$$u = y^{-1}$$

disto segue-se,

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$\frac{du}{dx} + \frac{1+x}{x}u = -1,$$

*que é uma **equação linear** com*

$$p(x) = \frac{1+x}{x}$$

$$g(x) = -1$$

Considere portanto,

$$\eta(x) = \int p(x)dx$$

$$= \int\left(\frac{1+x}{x}\right)dx$$

$$= x + \ln|x| + c_0,\ \ c_0 \in \mathbb{R}$$

e, tomando $c_0 = 0$, tem-se

$$\mu(x) = e^{\eta(x)}$$

$$= e^{x+\ln|x|}$$

$$= |x|\,e^x$$

$$= \pm x\,e^x$$

Escolhendo

$$\mu(x) = x\,e^x$$

Segue-se que

$$
\begin{aligned}
q(x) &= \int \mu(x) g(x) dx \\
&= -\int x\, e^x dx \\
&= e^x\,(1-x) + c_1,\ \ c_1 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \frac{q(x)}{\mu(x)} \\
&= \frac{e^x\,(1-x) + c_1}{x\, e^x}
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
y^{-1} &= \frac{e^x\,(1-x) + c_1}{x\, e^x} \Rightarrow \\
y &= \frac{x\, e^x}{e^x\,(1-x) + c_1}
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma M4

Prof^o. Edson

2ª Prova **1º Semestre** **2025**

Data: 13 de Maio de 2025 **Duração: 13:00 - 16:00**

Problema 1 *Sabendo que a função* $y_1 = e^{2x}$ *é uma solução da equação*

$$(2x+1)\,y'' - 4\,(x+1)\,y' + 4y = 0,$$

encontre ***outra solução*** *desta* ***edo****, que seja linearmente independente de* y_1.

Problema 2 *Resolva a equação*

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$$

Problema 3 *Encontre a* ***solução geral*** *da equação*

$$y'' + 4y' + 3y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Problema 4 *Resolva o* ***problema de valor inicial***

$$\begin{cases} y'' + y = \operatorname{sen}^2 x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Problema 5 *Encontre uma* ***solução particular*** *para a equação*

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x},\ x > 0$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 2ª Prova **2025**
Data: Quarta-feira, 28 de Maio **Turma M4**

Exercício 1 *Observe que a equação*

$$(2x+1)y'' - 4\,(x+1)\,y' + 4y = 0,$$

pode ser reescrita em sua ***forma padrão*** *da seguinte forma,*

$$y'' - \frac{4\,(x+1)}{2x+1}y' + \frac{4}{2x+1}y = 0$$

onde

$$P(x) = -\frac{4\,(x+1)}{2x+1}$$

Deseja-se encontrar uma outra solução desta equação sabendo que

$$y_1 = e^{2x}$$

é uma solução. Usando da ***redução de ordem****, considere*

$$\begin{aligned}
\eta(x) &= \int -P(x)dx \\
&= \int \frac{4\,(x+1)}{2x+1}dx \\
&= \int \left(2 + \frac{2}{2x+1}\right)dx \\
&= 2x + \ln|2x+1| + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Tomando $c_0 = 0$, segue-se que

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= e^{\eta(x)} \\
&= e^{2x+\ln|2x+1|} \\
&= e^{2x}e^{\ln|2x+1|} \\
&= \pm\,(2x+1)\,e^{2x}
\end{aligned}$$

Escolhendo

$$\mu(x) = (2x+1)\,e^{2x}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int \frac{\mu(x)}{y_1^2}dx \\
&= \int \frac{(2x+1)\,e^{2x}}{e^{4x}}dx \\
&= \int \frac{(2x+1)}{e^{2x}}dx \\
&= -e^{-2x}(x+1) + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Tomando $c_1 = 0$, tem-se,

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= u(x)y_1(x) \\
&= -e^{-2x}(x+1)e^{2x} \\
&= -(x+1)
\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Perceba que a equação dada,*

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$$

possui equação auxiliar dada por

$$m^4 - 5m^2 + 4 = 0$$

Considerando

$$\omega = m^2,$$

a equação anterior torna-se

$$\omega^2 - 5\omega + 4 = 0$$

cuja soluçõessão

$$\omega_1 = 1$$

$$\omega_2 = 4$$

Voltando à equação em m, tem-se para $\omega_1 = 1$,

$$m^2 = \omega_1 = 1$$

ou seja

$$m_1 = 1$$

$$m_2 = -1$$

e para $\omega_2 = 4$ tem-se

$$m^2 = \omega_2 = 4$$

ou seja,

$$m_3 = 2$$

$$m_4 = -2$$

Assim, o ***conjunto fundamental de soluções*** *da equação diferencial em questão é*

$$y_1 = e^{m_1 x}$$
$$= e^{x}$$
$$y_2 = e^{m_2 x}$$
$$= e^{-x}$$

$$y_3 = e^{m_3 x}$$
$$= e^{2x}$$
$$y_4 = e^{m_4 x}$$
$$= e^{-2x}$$

Logo, a ***solução geral*** *da equação é*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4$$
$$= c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}$$

com c_1, c_2, $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. ∎

Exercício 3 *Observe inicialmente que a* ***edo*** *em questão,*

$$y'' + 4y' + 3y = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

possui equação homogênea associada

$$y'' + 4y' + 3y = 0,$$

cuja equação característica é

$$m^2 + 4m + 3 = 0,$$

cujas soluções são

$$m_1 = -1$$

$$m_2 = -3$$

Ou seja, o ***conjunto fundamental de soluções*** *da equação homogênea em questão é*

$$y_1 = e^{m_1 x} = e^{-x}$$

$$y_2 = e^{m_2 x} = e^{-3x}$$

Logo, a ***solução complementar*** *da equação é*

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$$
$$= c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$$

com c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

É necessário agora, encontrar uma ***solução particular*** *da* ***edo*** *original. Para isto considere a seguinte proposta de solução*

$$y_p = Ae^{x} + Bxe^{-x}$$

Observe que

$$y_p' = Ae^{x} + B\left(1 - x\right)e^{-x}$$

$$y_p'' = Ae^{x} + B\left(-2 + x\right)e^{-x}$$

Substituindo na equação, tem-se

$$\begin{aligned} Ae^{x} + B\left(-2 + x\right)e^{-x} + 4Ae^{x} + \\ +4B\left(1 - x\right)e^{-x} + 3Ae^{x} + 3Bxe^{-x} &= \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \Rightarrow \\ 8Ae^{x} + 2Be^{-x} &= \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} 8A = \dfrac{1}{2} \\ 2B = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{16} \\ B = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

e,

$$y_p = \frac{1}{16}e^{x} + \frac{1}{4}xe^{-x}$$

e a solução geral que deseja-se encontrar é dada por

$$\begin{aligned} y_g &= y_c + y_p \\ &= c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{16}e^{x} + \frac{1}{4}xe^{-x} \\ &= c_2 e^{-3x} + \left(c_1 + \frac{x}{4}\right)e^{-x} + \frac{1}{16}e^{x} \end{aligned}$$

∎

Exercício 4 *Observe inicialmente que a equação homogênea associada ao PVI dado é*

$$y'' + y = 0$$

cuja equação associada é dada por

$$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm\mathbf{i}$$

ou seja

$$\alpha = 0$$
$$\beta = 1$$

e

$$y_1 = \cos x$$

$$y_2 = \operatorname{sen} x$$

e a solução complementar é

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 y_1 y_2 \\ &= c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

*Usando agora o **método da variação dos parâmetros** para encontrar uma solução particular, segue-se que*

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, \, f(x) = \operatorname{sen}^2 x \\ &= \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen}^2 x & \cos x \end{vmatrix} \\ &= -\operatorname{sen}^3 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \operatorname{sen}^2 x \end{vmatrix} \\ &= \cos x \operatorname{sen}^2 x \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} \\ &= -\operatorname{sen}^3 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{W_2}{W} \\ &= \cos x \operatorname{sen}^2 x \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} u_1 &= \int -\operatorname{sen}^3 x \, dx \\ &= -\int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x \, dx \\ &= -\int \left(1 - \cos^2 x\right) \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \cos x - \frac{\cos^3 x}{3} + c_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \int u_2' dx \\ &= \int \cos x \operatorname{sen}^2 x dx \\ &= \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + c_2 \end{aligned}$$

*com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Considerando $c_1 = c_2 = 0$, segue-se que, uma **solução particular** da equação é*

$$\begin{aligned} y_p &= y_1 u_1 + y_2 u_2 \\ &= \cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{3} + \frac{\operatorname{sen}^4 x}{3} \end{aligned}$$

Assim, a solução geral da equação é dada por

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{3} + \frac{\operatorname{sen}^4 x}{3} \end{aligned}$$

Uma vez que, $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$, segue-se que

$$c_1 = \frac{1}{3}$$
$$c_2 = 0$$

e por fim, temos

$$y = \frac{1}{3} \cos x + \cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{3} + \frac{\operatorname{sen}^4 x}{3}$$

■

Exercício 5 *Observe que a equação dada*

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x},\ x > 0$$

pode ser reescrita como

$$x^2y'' + xy' + y = x$$

Perceba que a equação homogênea associada é

$$x^2y'' + xy' + y = 0$$

que é uma ***Equação de Cauchy-Euler****, cuja* ***equação caracteristica*** *é*

$$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm\mathbf{i}$$

ou seja

$$\alpha = 0$$
$$\beta = 1$$

cujas soluções são

$$y_1 = \cos(\ln x)$$

$$y_2 = \text{sen}(\ln x)$$

Logo, a solução complementar da equação dada é

$$\begin{aligned} y_c &= c_1y_1 + c_2y_2 \\ &= c_1\cos(\ln x) + c_2\text{sen}(\ln x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Usando o ***método dos coeficientes a determinar****, para encontrar uma solução particular, considere a seguinte proposta*

$$y_p = Ax + B$$

Observe que

$$y'_p = A$$

$$y''_p = 0$$

Substituindo na edo original, tem-se

$$x^2y''_p + xy'_p + y_p = x \Rightarrow$$

$$0 + Ax + Ax + B = x \Rightarrow$$

$$2Ax + B = x$$

Ou seja

$$A = \frac{1}{2}$$

$$B = 0$$

e

$$y_p = \frac{x}{2}$$

Por fim, a solução geral do problema é dada por

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1\cos(\ln x) + c_2\text{sen}(\ln x) + \frac{x}{2} \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma M4

Prof$^{\text{o}}$. Edson

3ª Prova | **1º Semestre** | **2025**

Data: 03 de Julho de 2025 | **Duração: 13:00 - 16:00**

Problema 1 *Determine o **intervalo de convergência** da série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} (-2x)^{n-1}$$

Problema 2 *Encontre a **solução geral** da equação*

$$(x^2+1)y'' - 6y = 0$$

Problema 3 *Encontre **uma solução** da equação*

$$4xy'' + \frac{1}{2}y' + y = 0$$

Problema 4 *Calcule*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-1}{s^2\,(s+1)^3}\right\}$$

Problema 5 *Resolva o **problema de valor inicial***

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = t^3\, e^{2t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 3^{a} Prova **2025**
Data: Domingo, 6 de Julho **Turma M4**

Exercício 1 *Observe que o termo geral desta série é dado por*

$$a_n = \frac{n}{n+1}\left(-2x\right)^{n-1}$$

Assim,

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\left(-2x\right)^{n}$$

e,

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{n+1}{n+2}\left(-2x\right)^{n}\,\frac{n+1}{n(-2x)^{n-1}}\right| \\ &= \left|\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}(-2x)\right| \\ &= \frac{2(n+1)^2}{n(n+2)}\,|x| \end{aligned}$$

Usando o ***teste da razão****, tem-se que,*

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{2(n+1)^2}{n(n+2)}\,|x| \\ &= 2\,|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \\ &= 2\,|x| \end{aligned}$$

e a série será ***convergente*** *quando $L<1$, ou seja*

$$2\,|x| < 1 \Rightarrow$$

$$-1 < 2x < 1 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

Ou seja, o ***intervalo de convergência*** *da série é* $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ ■

Exercício 2 *Observe que $x=0$ é um ponto ordinário da* ***edo***

$$(x^2+1)y'' - 6y = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$(x^2+1)y'' - 6y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(x^2+1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - $$
$$-6\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$x^2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} +$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} -$$
$$-6\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n} +$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} -$$
$$-6\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n} +$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^{n} -$$
$$-6\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n +$$
$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n -$$
$$-6a_0 - 6a_1 x - 6\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 0 \Rightarrow$$

$$(2a_2 - 6a_0) + (6a_3 - 6a_1)\, x +$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\Big[(n^2 - n - 6)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2}\Big]x^n = 0$$

Logo,

$$\begin{cases} a_2 = 3a_0 \\ a_3 = a_1 \\ a_{n+2} = -\dfrac{(n^2-n-6)}{(n+2)(n+1)}a_n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_2 = 3a_0 \\ a_3 = a_1 \\ a_{n+2} = -\dfrac{n-3}{(n+1)}a_n \end{cases}$$

Supondo agora $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, tem-se,

$$a_2 = 3$$
$$a_3 = 0$$
$$a_4 = 1$$
$$a_5 = 0$$
$$a_6 = -\frac{1}{5}$$
$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_1 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$
$$= 1 + 3x^2 - x^4 + \frac{1}{5}x^6 + \cdots$$

Supondo agora $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, tem-se,

$$a_2 = 0$$
$$a_3 = 1$$
$$a_4 = 0$$
$$a_5 = 0$$
$$a_6 = 0$$
$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_2 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$
$$= x + x^3$$

e a solução geral da equação é

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Observe que $x = 0$ é um ponto **singular regular** da **edo***

$$4xy'' + \frac{1}{2}y' + y = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}$$
$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$
\begin{aligned}
&4xy'' + \tfrac{1}{2}y' + y = 0 \quad \Rightarrow \\
&4x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + \\
&+\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \\
&+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow \\
&\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + \\
&+\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \\
&+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow \\
&x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} + \right. \\
&\left. +\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n}\right] = 0 \quad \Rightarrow \\
&\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} + \\
&+\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n-1} + \\
&+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n} = 0 \\
&\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} + \\
&+\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n-1} + \\
&+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1} x^{n-1} = 0 \quad \Rightarrow \\
&4r(r-1)a_0 x^{-1} + \\
&+\sum_{n=1}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} + \\
&+\tfrac{1}{2}ra_0x^{-1} + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)a_n x^{n-1} + \\
&+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1} x^{n-1} = 0 \quad \Rightarrow \\
&\left(4r - \tfrac{7}{2}\right) ra_0 x^{-1} + \\
&\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(4n+4r-\tfrac{7}{2}\right)(n+r)a_n + a_{n-1}\right]x^{n-1} = 0
\end{aligned}
$$

Portanto, a ***equação indicial*** *é dada por*

$$\left(4r - \frac{7}{2}\right) r\, a_0 = 0$$

ou seja,

$$r = 0 \, ou \, r = \frac{7}{8}$$

Além disto, tem-se também que

$$\left(4n + 4r - \frac{7}{2}\right)(n+r)a_n + a_{n-1} = 0$$

donde segue-se a seguinte ***relação de recorrência***

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{\left(4n+4r-\frac{7}{2}\right)(n+r)}$$

Para $r = 0$, tal relação torna-se

$$a_n = -\frac{2a_{n-1}}{n\,(8n-7)}$$

Supondo $a_0 = 1$, tem-se

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -2 \\
a_2 &= \frac{2}{9} \\
a_3 &= -\frac{4}{459} \\
a_4 &= \frac{2}{11\,475} \\
a_n &= -\frac{4}{1893\,375}
\end{aligned}
$$

e, uma solução da equação dada é

$$y_1 = 1 - 2x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{459}x^3 + \frac{2}{11\,475}x^4 - \\ - \frac{4}{1893\,375}x^5 + \cdots$$

■

Exercício 4 *Usando frações parciais, tem-se que*

$$\frac{2s-1}{s^2(s+1)^3} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s+1} + \frac{d}{(s+1)^2} + \frac{e}{(s+1)^3}$$

$$= \frac{(a+c)\,s^4 + (3a+b+2c+d)\,s^3}{s^2(s+1)^3} +$$

$$+ \frac{(3a+3b+c+d+e)\,s^2 + (a+3b)\,s + b}{s^2(s+1)^3}$$

Ou seja

$$\begin{cases} a+c=0 \\ 3a+b+2c+d=0 \\ 3a+3b+c+d+e=0 \\ a+3b=2 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a=5 \\ b=-1 \\ c=-5 \\ d=-4 \\ e=-3 \end{cases}$$

Donde segue-se que

$$\frac{2s-1}{s^2(s+1)^3} = \frac{5}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{5}{s+1} - \frac{4}{(s+1)^2} - \frac{3}{(s+1)^3}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-1}{s^2(s+1)^3}\right\} &= 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \\ &- 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \\ &- 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} - \\ &- \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^3}\right\} \\ &= 5 - t - 5e^{-t} - 4te^{-t} - \frac{3}{2}t^2e^{-t} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Utilizando a* ***Transformada de Laplace*** *para a resolução desta equação, observe que*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''-4y'+4y\} &= \mathcal{L}\left\{t^3e^{2t}\right\} \qquad \Leftrightarrow \\ \mathcal{L}\{y''\} - 4\mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\left\{t^3\right\}\Big|_{s\to s-2} \end{aligned}$$

Considerando

$$Y = \mathcal{L}\{y\},$$

a equação anterior pode ser reescrita como

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) - 4\left[sY - y(0)\right] + 4Y = \frac{6}{(s-2)^4}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \left(s^2-4s+4\right)Y &= \frac{6}{(s-2)^4} \Rightarrow \\ (s-2)^2\,Y &= \frac{6}{(s-2)^4} \Rightarrow \\ Y &= \frac{6}{(s-2)^6} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}^{-1}\{Y\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{(s-2)^6}\right\} \\ &= \frac{6}{5!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5!}{(s-2)^6}\right\} \\ &= \frac{6}{5!}t^5e^{2t} \end{aligned}$$

ou seja,

$$y = \frac{1}{20}t^5e^{2t}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV - Turma M4

Profº. Edson

Prova Final **1º Semestre** **2025**

Data: 08 de Julho **Duração: 14:00 - 17:00**

Problema 1 *Resolva o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' + y \operatorname{tg} x = \sec x \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$$

Problema 2 *Encontre a* ***solução geral*** *da equação*

$$y'' + 4y' + 3y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Problema 3 *Encontre uma* ***solução particular*** *para a equação*

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x}$$

sendo $x > 0$.

Problema 4 *Calcule*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-1}{s^2\left(s+1\right)^3}\right\}$$

Problema 5 *Encontre* ***uma solução*** *da equação*

$$4xy'' + \frac{1}{2}y' + y = 0$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito Prova **2025**
Data: Quinta-feira, 10 de Julho **Turma M4**

Exercício 1 *Observe que a equação*

$$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sec x$$

pode ser reescrita da seguinte forma

$$y' + (\mathrm{tg}\,x)\;y = \sec x,$$

o que a caracteriza como uma ***equação diferencial linear****, em que*

$$p(x) = \mathrm{tg}\,x$$
$$f(x) = \sec x$$

Desta forma, considere

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \int p(x)dx\\ &= \int \mathrm{tg}\,x\,dx\\ &= -\ln|\cos x| + c_0,\;\; c_0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Tomando $c_0 = 0$, tem-se

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\eta(x)}\\ &= e^{-\ln|\cos x|}\\ &= e^{\ln|\cos x|^{-1}}\\ &= \frac{1}{|\cos x|}\\ &= \pm\frac{1}{\cos x}\end{aligned}$$

Escolhendo

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \frac{1}{\cos x}\\ &= \sec x\end{aligned}$$

segue-se que,

$$\begin{aligned}q(x) &= \int \mu(x)f(x)dx\\ &= \int \sec x\;\sec x\,dx\\ &= \int \sec^2 x dx\\ &= \mathrm{tg}\,x + c_1,\; c_1 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{\mathrm{tg}\,x + c_1}{\sec x}\\ &= \cos x\,(\mathrm{tg}\,x + c_1)\\ &= \mathrm{sen}\,x + c_1\cos x\end{aligned}$$

Sabe-se que

$$y(\pi) = 1$$

e disto segue-se que

$$\begin{aligned}\mathrm{sen}\,\pi + c_1\cos\pi &= 1 \qquad \Rightarrow\\ -c_1 &= 1 \qquad \Rightarrow\\ c_1 &= -1\end{aligned}$$

e, portanto

$$y(x) = \mathrm{sen}\,x - \cos x$$

■

Exercício 2 *Observe inicialmente que a* ***edo*** *em questão,*

$$y'' + 4y' + 3y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

possui equação homogênea associada

$$y'' + 4y' + 3y = 0,$$

cuja equação característica é

$$m^2 + 4m + 3 = 0,$$

cujas soluções são

$$m_1 = -1$$

$$m_2 = -3$$

*Ou seja, o **conjunto fundamental de soluções** da equação homogênea em questão é*

$$y_1 = e^{m_1 x} = e^{-x}$$

$$y_2 = e^{m_2 x} = e^{-3x}$$

*Logo, a **solução complementar** da equação é*

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} \end{aligned}$$

com c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

*É necessário agora, encontrar uma **solução particular** da **edo** original. Para isto considere a seguinte proposta de solução*

$$y_p = Ae^x + Bxe^{-x}$$

Observe que

$$y_p' = Ae^x + B(1-x)e^{-x}$$

$$y_p'' = Ae^x + B(-2+x)e^{-x}$$

Substituindo na equação, tem-se

$$\begin{aligned} &Ae^x + B(-2+x)e^{-x} + 4Ae^x + \\ &+4B(1-x)e^{-x} + 3Ae^x + 3Bxe^{-x} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow \\ &8Ae^x + 2Be^{-x} = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} 8A = \dfrac{1}{2} \\ 2B = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{16} \\ B = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

e,

$$y_p = \frac{1}{16}e^x + \frac{1}{4}xe^{-x}$$

e a solução geral que deseja-se encontrar é dada por

$$\begin{aligned} y_g &= y_c + y_p \\ &= c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{16}e^x + \frac{1}{4}xe^{-x} \\ &= c_2 e^{-3x} + \left(c_1 + \frac{x}{4}\right)e^{-x} + \frac{1}{16}e^x \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Observe que a equação dada*

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x},\ x > 0$$

pode ser reescrita como

$$x^2 y'' + xy' + y = x$$

Perceba que a equação homogênea associada é

$$x^2 y'' + xy' + y = 0$$

*que é uma **Equação de Cauchy-Euler**, cuja **equação caracteristica** é*

$$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm \mathbf{i}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta &= 1 \end{aligned}$$

cujas soluções são

$$y_1 = \cos(\ln x)$$

$$y_2 = \operatorname{sen}(\ln x)$$

Logo, a solução complementar da equação dada é

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 \cos(\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\ln x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

*Usando o **método dos coeficientes a determinar**, para encontrar uma solução particular, considere a seguinte proposta*

$$y_p = Ax + B$$

Observe que

$$y_p' = A$$

$$y_p'' = 0$$

Substituindo na edo original, tem-se

$$x^2 y_p'' + x y_p' + y_p = x \Rightarrow$$

$$0 + Ax + Ax + B = x \Rightarrow$$

$$2Ax + B = x$$

Ou seja

$$A = \frac{1}{2}$$

$$B = 0$$

e

$$y_p = \frac{x}{2}$$

Por fim, a solução geral do problema é dada por

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1 \cos(\ln x) + c_2 \text{sen}(\ln x) + \frac{x}{2} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Usando frações parciais, tem-se que*

$$\begin{aligned} \frac{2s-1}{s^2(s+1)^3} &= \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s+1} + \frac{d}{(s+1)^2} + \frac{e}{(s+1)^3} \\ &= \frac{(a+c)s^4 + (3a+b+2c+d)s^3}{s^2(s+1)^3} + \\ &+ \frac{(3a+3b+c+d+e)s^2 + (a+3b)s + b}{s^2(s+1)^3} \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{cases} a+c=0 \\ 3a+b+2c+d=0 \\ 3a+3b+c+d+e=0 \\ a+3b=2 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a=5 \\ b=-1 \\ c=-5 \\ d=-4 \\ e=-3 \end{cases}$$

Donde segue-se que

$$\frac{2s-1}{s^2(s+1)^3} = \frac{5}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{5}{s+1} - \frac{4}{(s+1)^2} - \frac{3}{(s+1)^3}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-1}{s^2(s+1)^3}\right\} &= 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \\ &- 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \\ &- 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} - \\ &- \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^3}\right\} \\ &= 5 - t - 5e^{-t} - 4te^{-t} - \frac{3}{2}t^2e^{-t} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Observe que $x = 0$ é um ponto **singular regular** da **edo***

$$4xy'' + \frac{1}{2}y' + y = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Segue-se disto, que

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} \end{aligned}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$4xy'' + \tfrac{1}{2}y' + y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$4x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + \\ +\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \\ +\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + \\ +\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \\ +\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} + \right. \\ \left. +\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n}\right] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} + \\ +\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n-1} + \\ +\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} + \\ +\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n-1} + \\ +\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1} x^{n-1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$4r(r-1)a_0 x^{-1} + \\ +\sum_{n=1}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1} + \\ +\tfrac{1}{2}ra_0 x^{-1} + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)a_n x^{n-1} + \\ +\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1} x^{n-1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(4r - \tfrac{7}{2}\right) ra_0 x^{-1} + \\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(4n + 4r - \tfrac{7}{2}\right)(n+r)a_n + a_{n-1}\right] x^{n-1} = 0$$

Portanto, a ***equação indicial*** *é dada por*

$$\left(4r - \frac{7}{2}\right) r\, a_0 = 0$$

ou seja,

$$r = 0 \, ou \, r = \frac{7}{8}$$

Além disto, tem-se também que

$$\left(4n + 4r - \frac{7}{2}\right)(n+r)a_n + a_{n-1} = 0$$

donde segue-se a seguinte ***relação de recorrência***

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{\left(4n + 4r - \frac{7}{2}\right)(n+r)}$$

Para $r = 0$, tal relação torna-se

$$a_n = -\frac{2a_{n-1}}{n\,(8n-7)}$$

Supondo $a_0 = 1$, tem-se

$$a_1 = -2$$
$$a_2 = \frac{2}{9}$$
$$a_3 = -\frac{4}{459}$$
$$a_4 = \frac{2}{11\,475}$$
$$a_n = -\frac{4}{1893\,375}$$

e, uma solução da equação dada é

$$y_1 = 1 - 2x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{459}x^3 + \frac{2}{11\,475}x^4 - \\ -\frac{4}{1893\,375}x^5 + \cdots$$

■