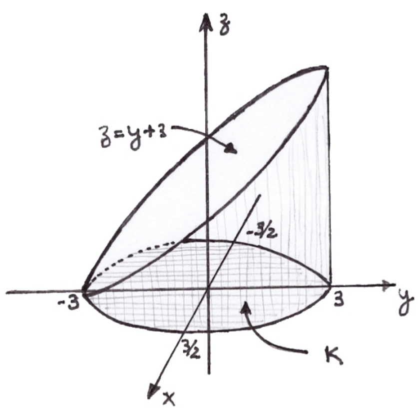
Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito Prova Final **2025**
Data: Sexta-feira, 19 de Dezembro **Turma M3**

Exercício 1 *Observe que o sólido Ω delimitado pelo cilindro $4x^2 + y^2 = 9$ e os planos $z = 0$ e $z = y + 3$ possui o seguinte esboço*



Assim, segue-se que o volume V deste sólido é dado por

$$V = \iint_K (y+3)dx\,dy$$

onde K é o conjuntos dos pontos (x, y) tais que

$$4x^2 + y^2 \leq 9 \Leftrightarrow \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 \leq 1$$

Usando coordenadas polares, tome

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}r\cos\theta \\ y = 3r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left| \begin{array}{cc} \frac{3}{2}\cos\theta & -\frac{3}{2}r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 3\,\mathrm{sen}\,\theta & 3r\cos\theta \end{array} \right| = \frac{9}{2}r$$

Assim, neste novo sistema de coordenadas, o conjunto K pode ser descrito do seguinte modo

$$K : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

e, portanto, segue-se que

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (3r\,\mathrm{sen}\,\theta + 3)\,\frac{9}{2}r\,dr\,d\theta \\ &= \frac{27}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r^2\mathrm{sen}\,\theta + r\right)dr\,d\theta \\ &= \frac{27}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3}r^3\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{2}r^2\right)\Big|_0^1 d\theta \\ &= \frac{27}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3}\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{2}\right)d\theta \\ &= \frac{27}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos\theta + \frac{1}{2}\theta\right)\Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{27\pi}{2} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Considere a seguinte* ***mudança de variáveis***

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = x + 2y \\ v = x - z \\ w = 2y - z \end{cases}$$

Ou seja,

$$\varphi : \begin{cases} x = \dfrac{u+v-w}{2} \\ y = \dfrac{u-v+w}{4} \\ z = \dfrac{u-v-w}{2} \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \frac{1}{4}$$

e neste referencial o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq u \leq 2 \\ 0 \leq v \leq 2 \\ 0 \leq w \leq 3 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} yz\,dx\,dy\,dz \\ &= \iiint_{\Omega_2} \left(\frac{u-v+w}{4}\right)\left(\frac{u-v-w}{2}\right)|J|\,du\,dv\,dw \\ &= \frac{1}{32}\int_0^2\int_0^2\int_0^3 (u-v+w)(u-v-w)\,dw\,dv\,du \\ &= -\frac{7}{8} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Considere*

$$P(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$Q(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= \frac{-y\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)2x}{x^2+y^2} \\ &= \frac{-2xy}{2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)(x^2+y^2)} \\ &= \frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= \frac{-x\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)2y}{x^2+y^2} \\ &= \frac{-2xy}{2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)(x^2+y^2)} \\ &= \frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y), \forall (x,y) \neq (0,0)$$

Assim, considerando

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, y > 0 \right\},$$

como Ω é simplesmente conexo (não tem "buracos") e $(0,0) \notin \Omega$, podemos afirmar que o campo vetorial

$$F(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$$

é conservativo em Ω. Portanto, o trabalho realizado por F para deslocar uma partícula do ponto $(-1,2)$ ao ponto $(1,2)$ é independente do caminho escolhido. Sendo assim, tomemos γ sendo o segmento de reta que une os pontos $(-1,2)$ e $(1,2)$, ou seja

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2 \end{cases}, -1 \leq t \leq 1$$

Com isto, chamando de τ o trabalho que desejamos calcular, teremos que

$$\begin{aligned} \tau &= \int_{\gamma} F \cdot d\gamma \\ &= \int_{-1}^{1} F(\gamma(t)) \cdot (1,0)dt \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}, \frac{2}{\sqrt{t^2+4}}\right) \cdot (1,0)dt \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}dt \end{aligned}$$

Para resolver esta última integral, tome

$$u = t^2 + 4$$

e observe que

$$du = 2tdt$$

$$t = -1 \Rightarrow u = 5$$

$$t = 1 \Rightarrow u = 5$$

Assim,

$$\begin{aligned} \tau &= \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}dt \\ &= \int_5^5 \frac{du}{2\sqrt{u}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Observe que a curva em questão é dada por*

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

sendo

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \ 0 \le t \le 1$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}, \ 0 \le t \le 1$$

$$-\gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, \ 0 \le t \le 1$$

Assim, o fluxo do campo $\mathbf{F}$ *através de* γ *é dado por*

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, ds &= \int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1\, ds + \int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2\, ds + \int_{\gamma_3} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_3\, ds \\
&= \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_1(t)) \cdot \frac{(0,-1)}{\|\gamma_1'(t)\|}\, \|\gamma_1'(t)\|\, dt + \\
&+ \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_2(t)) \cdot \frac{(1,0)}{\|\gamma_2'(t)\|}\, \|\gamma_2'(t)\|\, dt - \\
&- \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_3(t)) \cdot \frac{(1,-1)}{\|\gamma_3'(t)\|}\, \|\gamma_3'(t)\|\, dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \mathbf{F}(t,0)\cdot(0,-1)\, dt + \\
&+ \int_0^1 \mathbf{F}(1,t)\cdot(1,0)\, dt - \\
&- \int_0^1 \mathbf{F}(t,t)\cdot(1,-1)\, dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 -t dt + \int_0^1 (t-6) dt + \int_0^1 7t^2\, dt \\
&= \int_0^1 \left(7t^2 - 6\right) dt \\
&= \frac{7}{3}t^3 - 6t \Big|_0^1 \\
&= -\frac{11}{3}
\end{aligned}$$

■

Outro Modo: *Como* γ *é uma curva fechada e o campo vetorial* $\mathbf{F}$ *está definido em todo o seu interior* Ω*, o* ***Teorema da Divergência de Gauss****, garante que*

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, ds &= \iint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\, dx\, dy \\
&= \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(y - 6x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x + y^2)\right] dx\, dy \\
&= \iint_\Omega (-12x + 2y)\, dx\, dy \\
&= \int_0^1 \int_0^x (-12x + 2y)\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 -12xy + y^2 \Big|_0^x dx \\
&= \int_0^1 \left(-12x^2 + x^2\right) dx \\
&= -4x^3 + \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 \\
&= -\frac{11}{3}
\end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Observe inicialmente que a curva* γ *é dada por*

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

sendo

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, \ 0 \le t \le 4$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 - t \\ z = t \end{cases}, \ 0 \le t \le 4$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 4 - t \end{cases}, \ 0 \le t \le 4$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\gamma &= \int_{\gamma_1}\mathbf{F}\cdot d\gamma + \int_{\gamma_2}\mathbf{F}\cdot d\gamma + \int_{\gamma_3}\mathbf{F}\cdot d\gamma \\
&= \int_0^4 \mathbf{F}(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t)dt + \\
&\quad + \int_0^4 \mathbf{F}(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t)dt + \\
&\quad + \int_0^4 \mathbf{F}(\gamma_3(t))\cdot\gamma_3'(t)dt + \\
&= \int_0^4 \Big((4-t)^2, t, 0\Big)\cdot(-1,1,0)dt + \\
&\quad + \int_0^4 \Big(t^2, 4-t, 0\Big)\cdot(0,-1,1)dt + \\
&\quad + \int_0^4 \Big(t^2+(4-t)^2, 0, 2t(4-t)\Big)\cdot(1,0,-1)dt \\
&= \int_0^4 \Big(3t^2-6t-4\Big)\,dt \\
&= 0
\end{aligned}
$$

■

Outro Modo: *Observe inicialmente que*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2+z^2 & y & 2xz \end{vmatrix} \\
&= (0-0)\,\mathbf{i} - (2z-2z)\,\mathbf{j} + (0-0)\,\mathbf{k} \\
&= (0,0,0)
\end{aligned}
$$

*Considere σ uma parametrização qualquer da região do plano que possui γ como fronteira. O **Teorema de Stokes** nos garante que*

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\gamma &= \iint_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

■