Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito 3ª Prova **2025**
Data: Sexta-feira, 12 de Dezembro **Turma M3**

Exercício 1 *Observe que a equação que define a curva γ pode ser reescrita como*

$$x^2 + \left(\sqrt{2}y\right)^2 = 2$$

O que torna possível a seguinte parametrização para a mesma

$$\gamma : \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}, \; 0 \le t \le 2\pi$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\left(\sqrt{2}\cos t, \operatorname{sen} t\right)\cdot \\
&\quad \cdot\left(-\sqrt{2}\operatorname{sen} t, \cos t\right)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\sqrt{2}\cos t + 3\operatorname{sen} t, 2\sqrt{2}\cos t - \operatorname{sen} t\right)\cdot \\
&\quad \cdot\left(-\sqrt{2}\operatorname{sen} t, \cos t\right)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi}\Big(-3\cos t\operatorname{sen} t - 3\sqrt{2}\operatorname{sen}^2 t + \\
&\quad + 2\sqrt{2}\cos^2 t\Big)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi}\left(-3\cos t\operatorname{sen} t + \frac{5\sqrt{2}}{2}\cos 2t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)dt \\
&= -\frac{3}{2}\operatorname{sen}^2 t + \frac{5\sqrt{2}}{4}\operatorname{sen} 2t - \frac{\sqrt{2}}{2}t\,\Bigg|_0^{2\pi} \\
&= -\sqrt{2}\pi
\end{aligned}$$

■

Outro Modo: *Como γ é uma curva fechada e o campo vetorial* $\mathbf{F}$ *está definido em todo o seu interior Ω, o* ***Teorema de Green****, garante que*

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\gamma &= \iint_\Omega \operatorname{rot}\mathbf{F}\,dx\,dy \\
&= \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x-2) - \frac{\partial}{\partial y}(x+3y)\right]dx\,dy \\
&= -\iint_\Omega dx\,dy \\
&= -\text{Área}(\Omega) \\
&= -\sqrt{2}\pi
\end{aligned}$$

Perceba que Ω é uma elipse de eixos 1*e* $\sqrt{2}$*.* ■

Exercício 2 *Observe inicialmente que a curva que corresponde à fronteira da região em questão é dada por*

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2,$$

sendo

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{2}t^2 \end{cases}, \; -\frac{\sqrt{2}}{2} \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}, \; \frac{\pi}{4} \le t \le \frac{3\pi}{4}$$

Disto segue-se que a área que se deseja calcular é dada por

$$\begin{aligned}
A &= \int_\gamma x\,dy \\
&= \int_{\gamma_1} x\,dy + \int_{\gamma_2} x\,dy \\
&= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2\sqrt{2}t^2 dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2 t\,dt \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3}t^3\,\Bigg|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

■

Outro modo: *Usando a* ***Integral de Riemann****, a área procurada é dada por*

$$A = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{2}x^2\right) dx$$

$$= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}dx - \frac{\sqrt{2}}{3}x^3 \Big|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \left[\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{3}} \sqrt{1-x^2}dx\right] - \frac{1}{3}$$

Considere

$$x = \cos t$$

e observe que

$$dx = -\operatorname{sen} t\, dt$$

e

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \frac{3\pi}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

Assim,

$$A = \left[-\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2 t\, dt\right] - \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(t - \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right) \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4}$$

■

Exercício 3 *Uma parametrização possível para a região em questão pode ser dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = 2\operatorname{sen} u \cos v \\ y = 2\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z = 2\cos u \end{cases},$$

com

$$\Omega : \begin{cases} \frac{\pi}{4} \le u \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le v \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

e sua área, portanto, é

$$A = \iint_\sigma ds$$

$$= \iint_\Omega \left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v} \right\| du\, dv$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4\operatorname{sen} u\, du\, dv$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -4\cos u \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dv$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{2}dv$$

$$= \sqrt{2}\pi$$

■

Exercício 4 *Observe que a curva em questão é dada por*

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

sendo

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases},\ 0 \le t \le 1$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases},\ 0 \le t \le 1$$

$$-\gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases},\ 0 \le t \le 1$$

Assim, o fluxo do campo **F** *através de* γ *é dado por*

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, ds = \int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1\, ds + \int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2\, ds + \int_{\gamma_3} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_3\, ds$$

$$= \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_1(t)) \cdot \frac{(0,-1)}{\|\gamma_1'(t)\|} \|\gamma_1'(t)\|\, dt +$$

$$+ \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_2(t)) \cdot \frac{(1,0)}{\|\gamma_2'(t)\|} \|\gamma_2'(t)\|\, dt -$$

$$- \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_3(t)) \cdot \frac{(1,-1)}{\|\gamma_3'(t)\|} \|\gamma_3'(t)\|\, dt$$

$$= \int_0^1 \mathbf{F}(t,0) \cdot (0,-1)\, dt +$$

$$+ \int_0^1 \mathbf{F}(1,t) \cdot (1,0)\, dt -$$

$$- \int_0^1 \mathbf{F}(t,t) \cdot (1,-1)\, dt$$

$$= \int_0^1 -t dt + \int_0^1 (t-6)dt + \int_0^1 7t^2\, dt$$

$$= \int_0^1 \left(7t^2 - 6\right) dt$$

$$= \frac{7}{3}t^3 - 6t \Big|_0^1$$

$$= -\frac{11}{3}$$

■

Outro Modo: *Como γ é uma curva fechada e o campo vetorial $\mathbf{F}$ está definido em todo o seu interior Ω, o* ***Teorema da Divergência de Gauss****, garante que*

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, ds = \iint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\, dx\, dy$$

$$= \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(y - 6x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x + y^2)\right] dx\, dy$$

$$= \iint_\Omega (-12x + 2y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^x (-12x + 2y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 -12xy + y^2 \Big|_0^x dx$$

$$= \int_0^1 \left(-12x^2 + x^2\right) dx$$

$$= -4x^3 + \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1$$

$$= -\frac{11}{3}$$

■

Exercício 5 *Observe inicialmente que a curva γ é dada por*

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

sendo

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, \quad 0 \le t \le 4$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 - t \\ z = t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 4$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 4 - t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 4$$

Logo,

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\gamma = \int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\gamma + \int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\gamma + \int_{\gamma_3} \mathbf{F}\cdot d\gamma$$

$$= \int_0^4 \mathbf{F}(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t)dt +$$
$$+ \int_0^4 \mathbf{F}(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t)dt +$$
$$+ \int_0^4 \mathbf{F}(\gamma_3(t))\cdot\gamma_3'(t)dt +$$

$$= \int_0^4 \left((4-t)^2, t, 0\right)\cdot(-1,1,0)dt +$$
$$+ \int_0^4 \left(t^2, 4-t, 0\right)\cdot(0,-1,1)dt +$$
$$+ \int_0^4 \left(t^2 + (4-t)^2, 0, 2t(4-t)\right)\cdot(1,0,-1)dt$$

$$= \int_0^4 \left(3t^2 - 6t - 4\right) dt$$

$$= 0$$

■

Outro Modo: *Observe inicialmente que*

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + z^2 & y & 2xz \end{vmatrix}$$

$$= (0-0)\,\mathbf{i} - (2z - 2z)\,\mathbf{j} + (0-0)\,\mathbf{k}$$

$$= (0,0,0)$$

Considere σ uma parametrização qualquer da região do plano que possui γ como fronteira. O ***Teorema de Stokes*** *nos garante que*

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\gamma = \iint_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, ds$$

$$= 0.$$

■