Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito 2ª Prova **2025**
Data: Terça-feira, 25 de Novembro **Turma M3**

Exercício 1 *Considere a seguinte mudança de variáveis*

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = y - 2x \\ v = z - 3y \\ w = z - 4x \end{cases}$$

ou seja,

$$\varphi : \begin{cases} x = \dfrac{-3u - v + w}{2} \\ y = -2u - v + w \\ z = -6u - 2v + 3w \end{cases},$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right|$$
$$[8pt] = \left\| \begin{matrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 & 1 \\ -6 & -2 & 3 \end{matrix} \right\|$$
$$= \frac{1}{2}$$

E, neste referencial, o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 1 \\ 0 \le w \le 3 \end{cases}$$

E disto segue-se que

$$\iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega_1} |J|\,du\,dv\,dw$$
$$= \int_0^3 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} du\,dv\,dw$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^3 \int_0^1 u \Big|_0^1 dv\,dw$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^3 v \Big|_0^1 dw$$
$$= \frac{1}{2} v \Big|_0^3$$
$$= \frac{3}{2}$$

■

Exercício 2 *Usando **coordenadas cilíndricas**, ou seja*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r$$

Neste referencial, o sólido Ω, dado no problema, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le r \le z \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 1 \le z \le 2 \end{cases}$$

e o volume de Ω é dado por,

$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz$$
$$= \iiint_{\Omega_2} |J|\,dr\,d\theta\,dz$$
$$= \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^z r\ dr\,d\theta\,dz$$
$$= \int_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} \Big|_0^z d\theta\,dz$$
$$= \int_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{z^2}{2} d\theta\,dz$$
$$= \int_1^2 \left(\frac{z^2}{2}\theta \right) \Big|_0^{2\pi} dz$$

$$= \pi \int_1^2 z^2 dz$$

$$= \pi \left. \frac{z^3}{3} \right|_1^2$$

$$= \frac{7\pi}{3}$$

■

Exercício 3 *Considerando Ω o sólido descrito no problema, ou seja*

$$\Omega : \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 \geq 1 \end{cases}$$

O seu volume é dado por

$$V = \iiint_{\Omega} dx\, dy\, dz$$

*Usando **coordendas esféricas**, ou seja*

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases},$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi,$$

neste referencial, o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \\ 1 \leq \rho \leq 2\cos \varphi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Ou seja,,

$$V = \iiint_{\Omega_2} |J|\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_1^{2\cos\varphi} \rho^2 \operatorname{sen} \varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{3} \rho^3 \operatorname{sen} \varphi \right) \Bigg|_1^{2\cos\varphi} d\varphi\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(8\cos^3 \varphi \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \varphi \right) d\varphi\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(-2\cos^4 \varphi + \cos \varphi \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta$$

$$= \frac{11}{24} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{11}{12} \pi$$

■

Exercício 4 ***Trabalho Extra-classe.***

Exercício 5 *De acordo com o enunciado do problema, a densidade do sólido é*

$$\delta(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

*onde $k \in \mathbb{R}$. Usando **coordendas esféricas**, ou seja*

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases},$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi,$$

a esfera de raio a, neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq a \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Logo,

$$M = \iiint_{\Omega} \delta\,(x, y, z)\ dx\, dy\, dz$$

$$= k \iiint_{\Omega_2} \sqrt{\rho^2}\, |J|\ d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$= k \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \rho^3 \operatorname{sen} \varphi d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$= k \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4} \operatorname{sen} \varphi \Bigg|_0^a d\theta\, d\varphi$$

$$= k \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^4}{4} \operatorname{sen} \varphi\, d\theta\, d\varphi$$

$$= k \int_0^{\pi} \frac{a^4}{4} \operatorname{sen} \varphi\, \theta \Bigg|_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= k \frac{\pi a^4}{2} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \varphi\, d\varphi$$

$$= k \frac{\pi a^4}{2}\ (-\cos\ \varphi) \Bigg|_0^{\pi}$$

$$= k\pi a^4$$

■

Exercício 6 *De acordo com o enunciado do problema, segue-se que o momento de inércia do cubo Ω em torno do eixo z é dada por*

$$I_z = \iiint_\Omega d^2(x, yz)\delta(x, y, z) dx\, dy\, dz$$

sendo

$$\delta(x, y, z) = x$$

e

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

a densidade do cubo no ponto (x, y, z) e

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_\Omega \left(x^2 + y^2\right) x\, dx\, dy\, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left(x^3 + y^2 x\right) dx\, dy\, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{x^4}{4} + \frac{y^2 x^2}{2}\right) \Big|_0^1 dy\, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{4} + \frac{y^2}{2}\right) dy\, dz \\ &= \int_0^1 \left(\frac{y}{4} + \frac{y^3}{6}\right) \Big|_{0-}^1 dz \\ &= \int_0^1 \frac{5}{12} dz \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

■