

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito 1ª Prova
Data: Quarta-feira, 01 de Outubro

2025
Turma M3

Exercício 1 Observe que o domínio de integração Ω é dado por

$$\Omega : \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{x} \leq y \leq 2 \end{cases}$$

e pode ser reescrito como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq y^2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{x}{y^5 + 1} dy dx \\ &= \iint_{\Omega} \frac{x}{y^5 + 1} dx dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{y^2} \frac{x}{y^5 + 1} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x^2}{y^5 + 1} \Big|_0^{y^2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{y^4}{y^5 + 1} dy \\ &= \frac{1}{10} \ln |y^5 + 1| \Big|_0^2 \\ &= \frac{\ln 33}{10} \end{aligned}$$

Exercício 2 Para resolver a integral dada, considere a seguinte **mudança de variáveis**

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = 4x - y \\ v = x \end{cases}$$

ou seja,

$$\varphi : \begin{cases} x = v \\ y = 4v - u \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$\begin{aligned} |J| &= \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Neste referencial, o conjunto Ω gerado pelos vetores $(1,4)$ e $(3,3)$ torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq u \leq 9 \\ \frac{u}{3} \leq v \leq \frac{u+3}{3} \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} e^{4x-y} dx dy &= \iint_{\Omega_2} e^u |J| du dv \\ &= \int_0^9 \int_{\frac{u}{3}}^{\frac{u+3}{3}} e^u dv du \\ &= \int_0^9 e^u v \Big|_{\frac{u}{3}}^{\frac{u+3}{3}} du \\ &= \int_0^9 e^u dv \\ &= e^u \Big|_0^9 \\ &= e^9 - 1 \end{aligned}$$

Obs.: Este problema foi **cancelado**. Houve um erro de digitação e ao invés do vetor $(4,1)$ o correto deveria ser $(1,4)$. Pontos concedidos a cada aluno que fez a prova.

Exercício 3 O volume que deseja-se encontrar é dado por

$$V = \iiint_{\Omega} (8 - 2x - 4y) dx dy$$

sendo

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 - 2y \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Ou seja,,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \int_0^{4-2y} (8 - 2x - 4y) dx dy \\ &= \int_0^2 (8x - x^2 - 4yx) \Big|_0^{4-2y} dy \\ &= \int_0^2 (4y^2 - 16y + 16) dy \\ &= \left(\frac{4}{3}y^3 - 8y^2 + 16y \right) \Big|_0^2 \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

Exercício 4 Deseja-se calcular a integral

$$\iint_{\Omega} (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} dx dy$$

sendo Ω o conjunto $x^2 + y^2 \leq 1$, com $x + y \geq 1$ Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad |J| = r,$$

observe que o conjunto Ω , neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta} \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} dx dy &= \iint_{\Omega_2} (r^2)^{-\frac{3}{2}} |J| dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}}^1 r^{-3} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{r} \Big|_{\frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}}^1 d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta + \cos \theta - 1) d\theta \\ &= (-\cos \theta + \sin \theta - \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Exercício 5 De acordo com o enunciado do problema, segue-se que a massa da lâmina designada por Ω é dada por

$$M(\Omega) = \iint_{\Omega} \delta(x, y) dx dy$$

sendo

$$\delta(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

a densidade da chapa no ponto (x, y) e

$$\Omega : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 20^2 \\ x \geq 10 \end{cases}$$

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad |J| = r,$$

observe que o conjunto Ω , neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} \frac{10}{\cos \theta} \leq r \leq 20 \\ -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} M(\Omega) &= \iint_{\Omega_2} \frac{r^2 \cos^2 \theta}{r^2} |J| dr d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{\frac{10}{\cos \theta}}^{20} r \cos^2 \theta dr d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} r^2 \cos^2 \theta \Big|_{\frac{10}{\cos \theta}}^{20} d\theta \\ &= 50 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (4 \cos^2 \theta - 1) d\theta \\ &= 50 \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{100\pi}{3} + 50\sqrt{3} \end{aligned}$$