Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito Prova Final **2024**
Data: Quarta-feira, 11 de Dezembro **Turma M3**

Exercício 1 *Deseja-se calcular a integral*

$$\iint_\Omega \frac{2y}{4+\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

sendo Ω *o conjunto* $x^2+y^2 \leq 4$, *com* $x \leq 0$ *Usando* ***coordenadas polares****, ou seja*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} , \quad |J| = r,$$

observe que o conjunto Ω*, neste referencial, torna-se*

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ \dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \iint_\Omega \frac{2y}{4+\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy &= \iint_{\Omega_2} \frac{2r\,\mathrm{sen}\,\theta}{4+r}\, |J|\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{2r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}{4+r} d\theta\, dr \\ &= \int_0^2 \left. \frac{-2r^2\,\cos\theta}{4+r} \right|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} dr \\ &= \int_0^2 \frac{-2r^2}{4+r}\,(0-0)\, dr \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Observe que a equação do cone em questao é dada por*

$$x^2+y^2 = \frac{R^2}{h^2} z^2$$

com $0 \leq z \leq h$*. Logo, seu volume é dado por*

$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\, dx\, dy\, dz$$

onde

$$\Omega : \begin{cases} \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq h \\ (x,y) \in K \end{cases}$$

$$6x+6y+z = 6$$

sendo K o conjunto do pontos (x,y) *tais que*

$$x^2+y^2 \leq R^2$$

Usando ***coordenadas cilíndricas****, ou seja*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} , \quad |J| = r,$$

o conjunto Ω*, neste referencial, torna-se,*

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \frac{h}{R} r \leq z \leq h \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \iiint_\Omega 1\ |J|\, dr\, d\theta\, dz \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^R \int_{\frac{h}{R}r}^h r\, dz\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^R \left.(rz)\right|_{\frac{h}{R}r}^h dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^R \left(hr - \frac{h}{R}r^2\right) dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left.\left(\frac{hr^2}{2} - \frac{hr^3}{3R}\right)\right|_0^R d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{hR^2}{6} d\theta \\ &= \frac{1}{3}\pi R^2\, h \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Perceba que o sólido Ω pode ser expresso da seguinte maneira*

$$x^2+y^2+z^2 \leq 2z \Rightarrow$$
$$x^2+y^2+z^2-2z+1 \leq 1 \Rightarrow$$
$$x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1$$

Ou seja,Ω é a esfera sólida de raio unitário e centro em $(0,0,1)$. *Usando* ***coordenadas esféricas****,*

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases},$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi,$$

o conjunto Ω, neste referencial torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq 2\cos\varphi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}dx\,dy\,dz \\ &= \iiint_{\Omega_2} \rho\,|J|\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\varphi} \rho^3 \operatorname{sen}\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^4}{4}\operatorname{sen}\varphi\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi\,d\theta \\ &= 4\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\varphi\cos^4\varphi d\varphi\,d\theta \\ &= -\frac{4}{5}\int_0^{2\pi} \cos^5\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \frac{4}{5}\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{8\pi}{5} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Seja γ a curva que corresponde à fronteira da região em questão. Uma parametrição possível para esta curva é dada por*

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

sendo

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} ; \quad \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} ; \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim, a área que deseja-se calcular é dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_\gamma x dy \\ &= \int_{\gamma_1} x dy + \int_{\gamma_2} x dy \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2 t\,dt + \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t\,0\,dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \\ A &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Uma parametrização possível para a superfície em questão é dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u \operatorname{sen} v \\ z = 2u^2 \end{cases} ; \quad \underbrace{\begin{array}{l} 0 \leq u \leq 2 \\ 0 \leq v \leq 2\pi \end{array}}_{\Omega}$$

Donde segue-se que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = (\cos v, \operatorname{sen} v, 4u)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = (-u \operatorname{sen} v, u\cos v, 0)$$

e

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(-4u^2\cos v, -4u^2 \operatorname{sen} v, u\right)$$

$$\left\|\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}\right\| = u\sqrt{16u^2+1}$$

e a área da superfície de σ é dada por

$$\begin{aligned}
A &= \iint_{\sigma} ds \\
&= \iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du\, dv \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 u \sqrt{16u^2+1} du\, dv \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{65\sqrt{65}-1}{48} dv \\
&= \frac{65\sqrt{65}-1}{24} \pi
\end{aligned}$$

■